第七章 插值法

在生产或科研中，有时需要根据函数 $f(x)$ 在某些已知点的值去构造一个函数 $F(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式. 本书第六章介绍的最小二乘法是解决这类问题的一种方法. 本章将介绍解决这类问题的另一种方法——插值法. 插值法与最小二乘法的区别在于插值法要求构造出来的函数 $F(x)$ 在已知点与函数 $f(x)$ 有相等的函数值，或者还要求有相等的导数值.

§7.1 Lagrange 插值

一、插值问题

设已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一系列互异点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的函数值

$$y_i = f(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n,$$

而 $f(x)$ 的解析表达式是未知的. 例如，只是通过实验测得上述诸点的函数值. 构造一个函数 $F(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式，并要求

$$F(x_i) = y_i,\quad i=0,1,\cdots,n. \tag{7.1}$$

有时 $f(x)$ 的解析表达式虽然是已知的，但由于较为复杂而不便于直接使用，也需要构造一个较简单的函数 $F(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式，并要求其满足(7.1)式. 这类问题称为**插值问题**，$f(x)$ 称为**被插值函数**，$F(x)$ 称为**插值函数**，$[a,b]$ 称为插值区间，$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 称为**插值节点**或简称为节点，(7.1)式称为**插值条件**.

用插值函数 $F(x)$ 近似代替被插值函数 $f(x)$，得近似等式

$$f(x)\approx F(x),\quad x\in[a,b]$$

此式称为**插值公式**. 误差

$$R(x) = f(x) - F(x)$$

称为插值函数 $F(x)$的**余项**或**截断误差**.

以后几章将看到,插值函数 $F(x)$是对函数 $f(x)$进行其它数值计算(例如,求导数,求积分,解微分方程等)的有力工具.

如果要求插值函数 $F(x)$是多项式函数,则称插值问题是代数插值问题. 我们将主要考虑代数插值问题. 显然满足(7.1)的多项式有无限多个.

定理 7.1 存在唯一的 $p \in P_n[a,b]$满足插值条件(7.1),即满足

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\cdots,n. \tag{7.2}$$

证明 设

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n. \tag{7.3}$$

代入条件(7.2)得

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}. \tag{7.4}$$

这是关于 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的线性方程组,其系数行列式

$$V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n) = \det\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

为 Vandermonde 行列式. 利用行列式的性质可求得

$$V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i - x_j).$$

由于当 $i \neq j$ 时 $x_i \neq x_j$,所以上式右端各因式都不等于零. 因此,$V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n) \neq 0$,方程组(7.4)存在唯一解 $a_0,a_1,\cdots,a_n$,即可以唯一地确定一组系数,使所得的多项式(7.3)满足条件(7.2).

证毕.

根据定理 7.1,在 $P_n[a,b]$中存在唯一的多项式 $p(x)$满足插值条件(7.2),称之为 n 次插值多项式,或简称为**插值多项式**.因此,无论用什么方法求出的满足插值条件(7.2)的插值多项式,也无论所求出的插值多项式的表达形式如何,它们都是同一个多项式.

现在,插值问题的关键是如何具体求出插值多项式.求插值多项式的方法称为**插值法**.值得指出的是,解方程组(7.4),求出插值多项式的系数来确定插值多项式,一般计算量较大,有时还会对精度有严重影响,因而是不可取的.

二、Lagrange 插值多项式

令

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)y_k, \tag{7.5}$$

其中 $l_k(x)$是满足条件

$$l_k(x_i)=\begin{cases}1 & 当\ i=k\\ 0 & 当\ i\neq k\end{cases}$$

的 n 次多项式,$k=0,1,\cdots,n$.显然,由(7.5)表示的多项式 $L_n\in P_n[a,b]$,并且满足插值条件(7.1).由于 $x_0,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n$ 是 $l_k(x)$的 n 个零点,所以

$$l_k(x)=A\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x-x_i).$$

又由 $l_k(x_k)=1$ 可知

$$A=1/\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i).$$

因此

$$l_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i},\qquad k=0,1,\cdots,n. \tag{7.6}$$

代入(7.5)得

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)y_k. \tag{7.7}$$

形如(7.7)的插值多项式称为 **Lagrange 插值多项式**. 由(7.6)式所表示的 $n+1$ 个 n 次代数多项式 $l_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 称为以 x_0, $x_1,\cdots,x_n$ 为节点的 **Lagrange 插值基函数**. Lagrange 插值多项式是基函数的线性组合. 这种构造插值多项式的方法称为基函数法.

设

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$

则

$$\omega'_{n+1}(x_k)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i).$$

于是,Lagrange 插值多项式又可写成

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}y_k. \tag{7.8}$$

当 $n=1$ 时,由(7.7)式得

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1,$$

即

$$L_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0).$$

这是一个线性函数,通常称为 $f(x)$的线性插值函数,相应的插值法称为**线性插值**. 用 $L_1(x)$近似代替 $f(x)$,在几何上是用通过两点(x_0,y_0)与(x_1,y_1)的直线 $y=L_1(x)$近似代替曲线 $y=f(x)$,如图 7-1 所示.

当 $n=2$ 时,由(7.7)式得 $f(x)$的二次插值函数

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

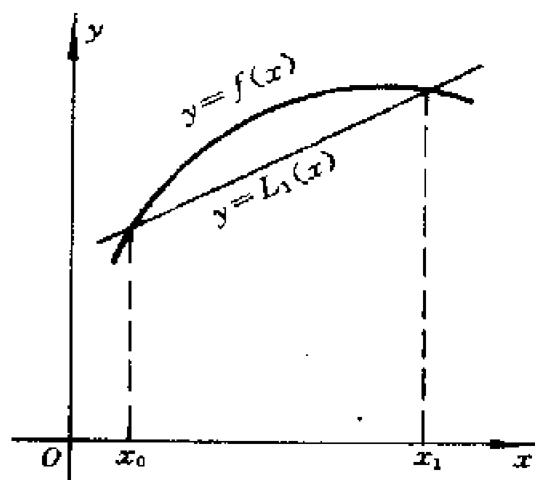


图 7-1

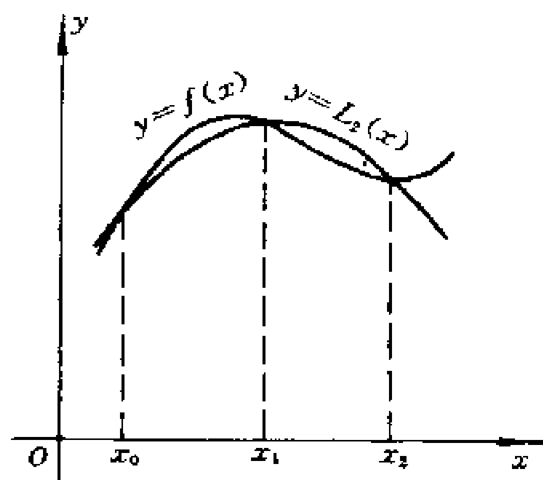


图 7-2

用 $L_2(x)$近似代替 $f(x)$，在几何上就是用通过点(x_0,y_0)，(x_1,y_1)和(x_2,y_2)的抛物线 $y=L_2(x)$近似代替曲线 $y=f(x)$，如图 7-2 所示. 因此，二次插值又称为抛物线插值.

三、插值余项的表达式

定理 7.2 设 $f\in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}(x)$在(a,b)内存在，$L_n(x)$是$f(x)$在节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的 n 次插值多项式，则对任意 $x\in[a,b]$，插值余项为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i), \tag{7.9}$$

其中 $\xi\in(a,b)$且依赖于 x.

证明 当 x 是节点时，(7.9)式显然成立. 下面假设 x 是$[a,b]$上的任一非节点. 由于在节点 x_i 处有

$$R_n(x_i)=f(x_i)-L_n(x_i)=0,\quad i=0,1,\cdots,n,$$

故可设

$$R_n(x)=K(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i). \tag{7.10}$$

作辅助函数

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)\omega_{n+1}(t),$$

其中

$$\omega_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - x_i).$$

不难看出，$\varphi(t)$满足

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \cdots = \varphi(x_n) = 0,$$即

$\varphi(t)$在$[a,b]$上有 $n+2$ 个互异的零点. 反复应用 Rolle 定理可知，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$使得 $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$，即

$$f^{(n+1)}(\xi) - L_n^{(n+1)}(\xi) - K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

而 $L_n^{(n+1)}(t) = 0, \omega_{n+1}^{(n+1)}(t) = (n+1)!$. 因此，由上式得

$$K(x) = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!.$$

代入(7.10)式即得(7.9)式. 证毕.

由于定理 7.2 中的 $\xi \in (a,b)$很难具体确定. 因此用(7.9)式也就很难计算出误差 $R_n(x)$. 对某些函数 $f(x)$，如果在$[a,b]$上有$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_{n+1}$，则有余项估计式

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|.$$

由插值余项的表达式(7.9)可以看出，$|\omega_{n+1}(x)|$是$|R_n(x)|$的一个因子，因而越小越好. 当插值多项式的次数 n 确定后，对于给定的 x，$|\omega_{n+1}(x)|$的大小就取决于 $n+1$ 个插值节点的选取. 为了使$|\omega_{n+1}(x)|$尽可能小一些，这 $n+1$ 个插值节点的选取原则是：使 x 尽可能位于区间 I_x 的中部. 此处 I_x 是包含 x 以及这 $n+1$ 个节点的最小闭区间.

例 7.1 已知函数 $y=\ln x$ 的数值如下表.

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4
y	1.098612	1.131402	1.163151	1.193922	1.223775

用线性插值和抛物线插值分别计算 ln3.27 的近似值，并估计它们

的误差.

解 根据插值节点的选取原则,用线性插值近似计算 ln3.27 时,取节点 $x_0=3.2$, $x_1=3.3$. 于是得到线性插值函数

$$L_1(x)=\frac{x-3.3}{3.2-3.3}\times 1.163151+\frac{x-3.2}{3.3-3.2}\times 1.193922$$

$$=0.307710x+0.178479.$$

因此

$$\ln 3.27\approx L_1(3.27)=1.184691.$$

用抛物线插值近似计算 ln3.27 时,取节点为 $x_0=3.2$, $x_1=3.3$, $x_2=3.4$. 于是得到二次插值函数

$$L_2(x)=-0.045900x^2+0.606060x-0.306225.$$

因此

$$\ln 3.27\approx L_2(3.27)=1.184787.$$

设 $f(x)=\ln x$,则

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2},\ f'''(x)=\frac{2}{x^3}.$$

在区间[3.2,3.3]上,$|f''(x)|\leqslant\frac{1}{3.2^2}$. 因此,用线性插值计算 ln3.27时的误差

$$|R_1(3.27)|\leqslant\frac{1}{2!3.2^2}|(3.27-3.20)(3.27-3.30)|$$

$$=0.000103.$$

在区间[3.2,3.4]上,$|f'''(x)|\leqslant\frac{2}{3.2^3}$. 因此,用抛物线插值计算 ln3.27时的误差

$$|R_2(3.27)|\leqslant\frac{2}{3!\,3.2^3}|(3.27-3.20)(3.27-3.30)(3.27-3.40)|$$

$$=0.000009.$$

由此可见,抛物线插值的精确度较高.

若 $f\in P_n[a,b]$,由(7.9)式可知,$R_n(x)\equiv 0$,因此 $f(x)$的 n 次

插值多项式就是 $f(x)$ 本身. 特别地,若取 $f(x)\equiv 1$,则由(7.7)式得到 Lagrange 插值基函数的一个重要性质

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1.$$

§7.2 Newton 插值

前一节介绍的 Lagrange 插值多项式,其形式具有对称性,便于编程序计算. 但是,如果在计算过程中需要在原有基础上增加一些节点以求得较高次的插值多项式时,必须全部重新计算. 本节将介绍另一种形式的插值多项式. 利用这种形式的插值多项式,当增加节点时只需在原来求得的插值多项式的基础上再增加一些项,这将为实际应用带来方便. 在构造此种插值多项式之前,先介绍差商概念及有关性质.

一、差商的定义及其性质

定义 7.1 已知函数 $f(x)$ 在互异节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的值分别为 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$. 记

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

称 $f[x_i, x_{i+1}]$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_{i+1} 的一阶**差商**. 记

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i},$$

并称为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_{i+1}, x_{i+2} 的二阶差商. 一般地,称

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

为 $f(x)$ 关于节点 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}$ 的 k 阶差商. 特别地, $f(x_i)$ 称为 $f(x)$ 关于节点 x_i 的零阶差商,并记为 $f[x_i]$. 差商又称为均差.

定理 7.3 差商具有如下基本性质:

(1) $f(x)$的 k 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$可表示为 $f(x_0)$, $f(x_1),\cdots,f(x_k)$的线性组合

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\omega'_{k+1}(x_i)},$$

其中

$$\omega_{k+1}(x)=\prod_{j=0}^{k}(x-x_j).$$

(2) 差商与其所含节点的排列次序无关,即对任意 x_l 与 x_j $(l\neq j)$都有

$$\begin{aligned}&f[x_0,\cdots,x_{l-1},x_l,x_{l+1},\cdots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\cdots,x_k]\\ =\ &f[x_0,\cdots,x_{l-1},x_j,x_{l+1},\cdots,x_{j-1},x_l,x_{j+1},\cdots,x_k].\end{aligned}$$

(3) $f[x_0,x_1,\cdots,x_k,x_m]$

$$=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_m]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]}{x_m-x_k}.$$

(4) 如果 $f(x)$是 n 次多项式,则其 k 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots x_{k-1},x]$,当 $k\leqslant n$ 时是 x 的 $n-k$ 次多项式,当 $k>n$ 时对一切 x 恒等于零.

证明 性质(1)可用数学归纳法证明(留给读者). 性质(2)是性质(1)的直接推论. 由性质(2)及差商定义得

$$\begin{aligned}f[x_0,x_1,\cdots,x_k,x_m]&=f[x_k,x_0,\cdots,x_{k-1},x_m]\\ &=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_m]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]}{x_m-x_k},\end{aligned}$$

性质(3)得证. 性质(4)可用数学归纳法和性质(3)证明(留给读者).

二、Newton 插值公式

由差商的性质(3)有

$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x]$,

$f[x_0,x]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x_0,x_1,x]$,

$f[x_0,x_1,x]=f[x_0,x_1,x_2]+(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x]$,

……，

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x]=f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n] + (x-x_n)f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x].$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ (x-x_0)f[x_0,x_1] \\ &+ (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\ &+ \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots,x_n] \\ &+ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]. \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} N_n(x) = f(x_0) &+ (x-x_0)f[x_0,x_1] \\ &+ (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\ &+ \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots x_n], \end{aligned} \tag{7.11}$$

$$E_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x_0,x_1,\cdots x_n,x], \tag{7.12}$$

则

$$f(x) = N_n(x) + E_n(x).$$

显然 $N_n(x)$ 是 x 的次数不超过 n 的多项式，且满足

$$N_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0,1,\cdots,n.$$

由插值多项式的唯一性，$N_n(x_i)$ 是满足插值条件(7.1)的 n 次插值多项式，称之为 **Newton 插值多项式**. (7.11)式称为 Newton 插值公式. $n+1$ 个多项式

$$1,(x-x_0),(x-x_0)(x-x_1),\cdots,(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

称为以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为节点的 **Newton 插值基函数**. Newton 插值多项式 $N_n(x)$ 是 Newton 插值基函数的线性组合.

由于满足(7.1)的 Newton 插值多项式 $N_n(x)$ 和 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$ 是恒等的，因此它们的余项 $E_n(x)$ 与 $R_n(x)$ 也是恒等的. 再利用(7.9)和(7.12)式得到

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

其中$\xi\in(a,b)$. 自此得到差商与导数之间的关系为

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \tag{7.13}$$

其中$\xi\in(a,b)$.

由(7.11)式可知,为了计算 Newton 插值多项式 $N_n(x)$,只需计算在节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的差商 $f[x_0,x_1]$, $f[x_0,x_1,x_2]$, $\cdots$, $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$. 按照差商的定义,计算 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$时,需要两个较低阶差商 $f[x_1,x_2,\cdots,x_k]$与 $f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]$之值. 而要计算这两个 $k-1$ 阶差商,又需要三个 $k-2$ 阶差商 $f[x_2,x_3,\cdots,x_k]$, $f[x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}]$与 $f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-2}]$的值. 依次类推,最后,需要 $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\cdots$, $f(x_k)$的值. 这个计算过程可列成如下的差商表:

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	$\cdots$
x_0	$\underline{f(x_0)}$				
x_1	$f(x_1)$	$\underline{f[x_0,x_1]}$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2]}$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

表中底下有横线的差商就是构造 Newton 插值多项式时所需的差商.

例 7.2　给定数表:

x	1	2	4	5	6	8
$f(x)$	0	2	8	12	18	28

试用二次 Newton 插值多项式计算 $f(1.5)$和 $f(5.8)$的近似值,用

四次 Newton 插值多项式计算 $f(4.8)$的近似值.

解 作差商表如下：

x	$f(x)$	一阶	二阶	三阶	四阶	五阶
1	0					
2	2	2				
4	8	3	$\frac{1}{3}$			
5	12	4	$\frac{1}{3}$	0		
6	18	6	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	
8	28	5	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{60}$

根据上节讨论的插值节点选取原则，用二次 Newton 插值多项式计算 $f(1.5)$时，取节点 $x_0=1$，$x_1=2$ 和 $x_2=4$. 二次 Newton 插值多项式为

$$
\begin{aligned}
N_{21}(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) \\
&\quad + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
&= 2(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)(x-2).
\end{aligned}
$$

于是

$$
f(1.5) \approx N_{21}(1.5) = 0.916667.
$$

为计算 $f(5.8)$，选取 $x_0=4$，$x_1=5$，$x_2=6$ 为节点，得到二次 Newton 插值多项式

$$
\begin{aligned}
N_{22}(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) \\
&\quad + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
&= 8 + 4(x-4) + (x-4)(x-5).
\end{aligned}
$$

由此得到

$$f(5.8) \approx N_{22}(5.8) = 16.64.$$

用四次 Newton 插值多项式计算 $f(4.8)$时，选取 $x_0=2, x_1=4, x_2=5, x_3=6, x_4=8$ 为节点，得到四次 Newton 插值多项式

$$\begin{aligned}
N_4(x) = & f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) \\
& + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
& + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
& + f[x_0,x_1,\cdots,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
& \cdot (x-x_3) \\
= & 2 + 3(x-2) + \frac{1}{3}(x-2)(x-4) \\
& + \frac{1}{6}(x-2)(x-4)(x-5) \\
& - \frac{1}{12}(x-2)(x-4)(x-5)(x-6).
\end{aligned}$$

因此

$$f(4.8) \approx N_4(4.8) = 11.0272.$$

三、差分的定义及其性质

用差商表示的 Newton 插值多项式，其节点可以是不等距的。如果节点是等距分布时，各阶差商可以改写为用差分表示，此时插值多项式将大为简化。在这里，首先介绍差分概念。

定义 7.2 设有等距节点

$$x_k = x_0 + kh, \quad k=0,1,\cdots,$$

其中 h 是非负常数，称为**步长**。记

$$f_k = f(x_k), f_{k\pm\frac{1}{2}} = f(x_k \pm \frac{h}{2}), \ k=0,1,\cdots,$$

令

$$\begin{aligned}
\Delta f_k &= f_{k+1} - f_k, \\
\nabla f_k &= f_k - f_{k-1}, \\
\delta f_k &= f_{k+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Δf_k，∇f_k 和 δf_k 分别称为 f 在 x_k 的一阶**向前差分**、一阶**向后差分**和一阶**中心差分**. Δ，∇ 和 δ 称为(向前，向后和中心)差分算子. 由此，可以归纳地定义 m 阶向前、向后和中心差分分别为

$$\Delta^m f_k = \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k,$$

$$\nabla^m f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1},$$

$$\delta^m f_k = \delta^{m-1} f_{k+\frac{1}{2}} - \delta^{m-1} f_{k-\frac{1}{2}}.$$

规定零阶差分为

$$\Delta^0 f_k = \nabla^0 f_k = \delta^0 f_k = f_k.$$

例 7.3　根据定义

$$\Delta^2 f_k = \Delta(\Delta f_k) = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k,$$

$$\Delta^3 f_k = \Delta^2 f_{k+1} - \Delta^2 f_k = f_{k+3} - 3f_{k+2} + 3f_{k+1} - f_k,$$

$$\nabla^2 f_k = \nabla(\nabla f_k) = \nabla f_k - \nabla f_{k-1} = f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2},$$

$$\nabla^3 f_k = \nabla^2 f_k - \nabla^2 f_{k-1} = f_k - 3f_{k-1} + 3f_{k-2} - f_{k-3}.$$

$$\delta^2 f_k = \delta(\delta f_k) = \delta f_{k+\frac{1}{2}} - \delta f_{k-\frac{1}{2}} = f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}$$

$$\delta^3 f_k = \delta^2 f_{k+\frac{1}{2}} - \delta^2 f_{k-\frac{1}{2}} = f_{k+\frac{3}{2}} - 3f_{k+\frac{1}{2}} + 3f_{k-\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{3}{2}}.$$

以下两个定理都可用归纳法加以证明，在此从略.

定理 7.4　各阶差分与函数值有如下关系：

$$\Delta^m f_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i f_{m+k-i},$$

$$\nabla^m f_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i f_{k-i},$$

$$\delta^m f_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i f_{\frac{m}{2}+k-i},$$

定理 7.5　差分与差商有如下关系：

$$\Delta^m f_k = m!\, h^m f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}], \tag{7.14}$$

$$\nabla^m f_k = m!\, h^m f[x_{k-m}, x_{k-m+1}, \cdots, x_k], \tag{7.15}$$

$$\delta^{2m+1} f_{k+\frac{1}{2}} = (2m+1)!\, h^{2m+1} f[x_{k-m}, x_{k-m+1}, \cdots, x_{k+m+1}],$$

$$\delta^{2m} f_k = (2m)!\, h^{2m} f[x_{k-m}, x_{k-m+1}, \cdots, x_{k+m}].$$

由定理 7.4 可得向后差分与向前差分有如下关系：

$$\nabla^m f_k = \Delta^m f_{k-m}.$$

由(7.13)式和定理 7.5 可得差分和导数的关系为

$$\Delta^m f_k = h^m f^{(m)}(\xi), \quad \xi \in (x_k, x_{k+m}),$$

$$\nabla^m f_k = h^m f^{(m)}(\xi), \quad \xi \in (x_{k-m}, x_k).$$

由(7.14)式和差商的性质(4)可得如下结论.

定理 7.6　设 $f(x)$是 n 次多项式，则 $f(x)$在点 x 处的 m 阶差分 $\Delta^m f$，当 $m \leqslant n$ 时是 $n-m$ 次多项式，为 $m > n$ 时为零.

四、等距节点的 Newton 插值公式

设插值节点是等距节点

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

利用 Newton 插值多项式(7.11)及公式(7.14)得

$$N_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$+ \cdots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

令 $x = x_0 + th$，$t > 0$，代入上式，则有

$$N_n(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

$$+ \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0. \quad (7.16)$$

此式称为 **Newton 向前插值公式**. 利用(7.12)和(7.14)式得到插值余项

$$R_n(x_0 + th) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad (7.17)$$

其中 $\xi \in (x_0, x_n)$.

如果将节点重新排列为

$$x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1, x_0,$$

此时 Newton 插值多项式(7.11)成为

$$N_n(x)=f(x_n)+(x-x_n)f[x_n,x_{n-1}]$$
$$+(x-x_n)(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},x_{n-2}]$$
$$+\cdots+(x-x_n)\cdots(x-x_1)f[x_n,x_{n-1},\cdots,x_0].$$

令 $x=x_n+th, t<0$,代入上式,并利用(7.15)式得

$$N_n(x_n+th)=f_n+t\nabla f_n+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n$$
$$+\cdots+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f_n. \quad (7.18)$$

此式称为 **Newton 向后插值公式**,其余项为

$$R_n(x_n+th)=\frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi), \quad (7.19)$$

其中 $\xi\in(x_0,x_n)$.

一般地,当需要插值的点 x 在 x_0 点附近时,利用 Newton 向前插值公式(7.16);当需要插值的点 x 在 x_n 点附近时,利用 Newton 向后插值公式(7.18).

由函数值 f_i $(i=0,1,\cdots,n)$ 出发计算各阶差分十分简单,仅包含减法运算,可按下表构造差分表.

x_k	f_k	$\Delta(\nabla)$	$\Delta^2(\nabla^2)$	$\Delta^3(\nabla^3)$	$\Delta^4(\nabla^4)$	$\cdots$
x_0	f_0					
		$\Delta f_0(\nabla f_1)$				
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0(\nabla^2 f_2)$			
		$\Delta f_1(\nabla f_2)$		$\Delta^3 f_0(\nabla^3 f_3)$		
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1(\nabla^2 f_3)$		$\Delta^4 f_0(\nabla^4 f_4)$	
		$\Delta f_2(\nabla f_3)$		$\Delta^3 f_1(\nabla^3 f_4)$		
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2(\nabla^2 f_4)$		$\vdots$	
		$\Delta f_3(\nabla f_4)$		$\vdots$		
x_4	f_4		$\vdots$			
		$\vdots$				
$\vdots$	$\vdots$					

例 7.4 已知 $f(x)=\cos x$ 的函数值如下表. 用四次 Newton 插值多项式求 cos0.048 及 cos0.575 的近似值,并估计误差.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x)$	1.00000	0.99500	0.98007	0.95534	0.92106	0.87758	0.82534

解 先构造函数的差分表如下：

k	x_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$	$\Delta^4 f_k$
0	0.0	1.00000				
			−0.00500			
1	0.1	0.99500		−0.00993		
			−0.01493		0.00013	
2	0.2	0.98007		−0.00980		0.00012
			−0.02473		0.00025	
3	0.3	0.95534		−0.00955		0.00010
			−0.03428		0.00035	
4	0.4	0.92106		−0.00920		0.00009
			−0.04348		0.00044	
5	0.5	0.87758		−0.00876		
			−0.05224			
6	0.6	0.82534				

用 Newton 向前插值公式计算 cos0.048．此时 $h=0.1, t=0.48$. 因此

$$
\begin{aligned}
\cos 0.048 &\approx N_4(0.048)\\
&= 1.00000 + 0.48(-0.00500)\\
&\quad + \frac{0.48(0.48-1)}{2!}(-0.00993)\\
&\quad + \frac{0.48(0.48-1)(0.48-2)}{3!}0.00013\\
&\quad + \frac{0.48(0.48-1)(0.48-2)(0.48-3)}{4!}0.00012\\
&= 0.99884.
\end{aligned}
$$

因为 $f^{(5)}(x)=-\sin x$，所以 $|f^{(5)}(x)|\leqslant 0.56465$. 由(7.17)式得误差估计

$$
\begin{aligned}
&|R_4(0.048)|\\
&\leqslant \frac{0.1^5}{5!}|0.48(0.48-1)\\
&\qquad (0.48-2)(0.48-3)(0.48-4)| \times 0.56465
\end{aligned}
$$

$$= 0.16 \times 10^{-6}.$$

用 Newton 向后插值公式计算 cos0.575. 此时，$h=0.1, t=-0.25$. 因此

$$\begin{aligned}
\cos 0.575 \approx N_4(0.575) \\
&= 0.82534 + (-0.25)(-0.05224) \\
&\quad + \frac{-0.25(1-0.25)}{2!}(-0.00876) \\
&\quad + \frac{-0.25(1-0.25)(2-0.25)}{3!}0.00044 \\
&\quad + \frac{-0.25(1-0.25)(2-0.25)(3-0.25)}{4!}0.00009 \\
&= 0.83919.
\end{aligned}$$

由(7.19)式得误差估计

$$\begin{aligned}
&|R_4(0.575)| \\
&\leqslant \frac{0.1^5}{5!}|(-0.25)(1-0.25)(2-0.25) \\
&\qquad (3-0.25)(4-0.25)| \times 0.56465 \\
&= 0.16 \times 10^{-6}.
\end{aligned}$$

§7.3 Hermite 插值与分段插值

一、Hermite 插值

在实践中，有些问题不但要求插值函数 $p(x)$ 与被插值函数 $f(x)$ 在节点 x_k 上的函数值相等，而且还要求直到 m_k 阶的导数值也相等，即要求 $p(x)$ 满足

$$\begin{aligned}
&p(x_k) = f(x_k),\ p'(x_k) = f'(x_k), \cdots, \\
&p^{(m_k)}(x_k) = f^{(m_k)}(x_k), \quad k = 0,1,\cdots,n,
\end{aligned}$$

其中 $m_0, m_1, \cdots, m_n$ 是非负整数. 这种插值问题称为 Hermite 插值问题. 满足这种要求的插值多项式称为 **Hermite 插值多项式**.

作为一种具体的情况，设已知

$$f(x_k)=y_k,\quad f'(x_k)=y'_k,\quad k=0,1,\cdots,n.$$

要求构造 Hermite 插值多项式 $H_{2n+1}\in P_{2n+1}[a,b]$，满足条件

$$H_{2n+1}(x_k)=y_k,\ H'_{2n+1}(x_k)=y'_k,\ k=0,1,\cdots,n. \tag{7.20}$$

从几何上看，即要求函数 $H_{2n+1}(x)$ 与 $f(x)$ 在 $n+1$ 个节点处相切.

在本节，我们不去讨论 Hermite 插值的一般情形，而只讨论满足(7.20)的插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 的存在性、唯一性、构造方法及余项.

定理 7.7 满足插值条件(7.20)的 Hermite 插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 唯一地存在，且

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\Big[y_k+(x-x_k)\Big(y'_k-2y_k\sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{1}{x_k-x_i}\Big)\Big]l_k^2(x), \tag{7.21}$$

其中 $l_k(x)$ 是 Lagrange 插值基函数. 即

$$l_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i},\quad k=0,1,\cdots,n.$$

证明 作多项式

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}[\alpha_k(x)y_k+\beta_k(x)y'_k], \tag{7.22}$$

其中 $\alpha_k(x)$ 和 $\beta_k(x)$ 都是待定函数. 为了使 $H_{2n+1}(x)$ 满足插值条件(7.20)，只需要求 $\alpha_k(x)$ 和 $\beta_k(x)$ 满足下列条件：

(1) $\alpha_k(x)$ 和 $\beta_k(x)$ 都是 $2n+1$ 次多项式；

(2) $\alpha_k(x_j)=\begin{cases}1 & \text{当 } j=k\\ 0 & \text{当 } j\neq k\end{cases}$,

$\beta_k(x_j)=0$；

(3) $\alpha_k'(x_j)=0$,

$$\beta_k'(x_j)=\begin{cases}1 & 当\ j=k\\ 0 & 当\ j\neq k\end{cases},$$

其中 $j,k=0,1,\cdots,n$. 为此,设

$$\alpha_k(x)=(a_kx+b_k)l_k^2(x),\tag{7.23}$$

$$\beta_k(x)=(c_kx+d_k)l_k^2(x)\tag{7.24}$$

其中 a_k,b_k,c_k,d_k 是待定常数. 因为

$$l_k(x_j)=\begin{cases}1 & 当\ j=k\\ 0 & 当\ j\neq k\end{cases},\tag{7.25}$$

所以由(7.23)和(7.24)式给出的 $\alpha_k(x)$和 $\beta_k(x)$满足条件(1),且当 $j\neq k$ 时它们满足条件(2)和条件(3). 现在,令 $\alpha_k(x)$和 $\beta_k(x)$当 $j=k$ 时满足条件(2)和(3),并利用(7.25)式得

$$\begin{aligned}&a_kx_k+b_k=1,\\&c_kx_k+d_k=0,\\&a_k+2(a_kx_k+b_k)l_k'(x_k)=0,\\&c_k+2(c_kx_k+d_k)l_k'(x_k)=1.\end{aligned}$$

由此解得

$$\begin{aligned}&a_k=-2l_k'(x_k),\quad &b_k=1+2x_kl_k'(x_k),\\&c_k=1,&d_k=-x_k.\end{aligned}$$

注意到

$$l_k'(x_k)=\sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{1}{x_k-x_i},$$

于是得到

$$\alpha_k(x)=\left[1-2(x-x_k)\sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{1}{x_k-x_i}\right]l_k^2(x),$$

$$\beta_k(x)=(x-x_k)l_k^2(x).$$

代入(7.22)式得到(7.21)式. 如此构造的 $H_{2n+1}(x)$是满足插值条件(7.20)的次数不超过 $2n+1$ 的多项式,这也就证明了存在性.

下面证明唯一性.设另有 $Q_{2n+1} \in P_{2n+1}[a,b]$ 满足插值条件(7.20),则每个节点 x_k 都是

$$\varphi(x) = H_{2n+1}(x) - Q_{2n+1}(x)$$

的二重零点.于是 $\varphi \in P_{2n+1}[a,b]$ 至少有 $2n+2$ 个零点(包括重零点数),从而

$$\varphi(x) \equiv 0,$$

即有

$$Q_{2n-1}(x) \equiv H_{2n+1}(x). \qquad \text{证毕.}$$

定理 7.7 证明中的函数 $\alpha_k(x)$ 和 $\beta_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 称为关于插值条件(7.20)的插值问题的基函数. Hermite 插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 是它们的线性组合.

特别地,当 $n=1$ 时,

$$\alpha_0(x) = \left(1 - 2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2,$$

$$\alpha_1(x) = \left(1 - 2\frac{x-x_1}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2,$$

$$\beta_0(x) = (x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2,$$

$$\beta_1(x) = (x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2.$$

由此得到三次 Hermite 插值多项式

$$\begin{aligned} H_3(x) = & \left(1 - 2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 y_0 \\ & + \left(1 - 2\frac{x-x_1}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 y_1 \\ & + (x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 y'_0 \\ & + (x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 y'_1. \end{aligned} \tag{7.26}$$

利用定理 7.2 的证明方法可证明下面的结论.

定理 7.8　设 $f(x)$ 在插值区间 $[a,b]$ 上存在直到 $2n+1$ 阶连续导数，在 (a,b) 内存在 $2n+2$ 阶导数，则 Hermite 插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 的余项为

$$R(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x), \tag{7.27}$$

其中 $\xi\in(a,b)$，$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

二、分段插值

由 Lagrange 插值和 Hermite 插值的余项公式(7.9)和(7.27)可以看出，插值余项的值与插值节点的个数 $n+1$ 有关. 但是，不能简单地认为在一个确定的区间上节点越多(即 n 越大)逼近误差越小. 首先，余项公式(7.9)和(7.27)分别是在被插值函数 $f(x)$ 具有 $n+1$ 阶和 $2n+2$ 阶导数的前提下得到的，当 n 很大时这样的条件有时可能得不到满足，此时也就不能用这样的公式估计误差. 其次，即使 $f(x)$ 有很好的光滑性，公式中的 $f^{(n+1)}(\xi)$ 和 $f^{(2n+2)}(\xi)$ 有时也会随着 n 的增大而增大，以致于使插值余项在某些点的值不是随着 n 的增大而减小，而是随着 n 的增大而增大，下例中的函数就是如此，它是由 Runge 给出的.

例 7.5　设

$$f(x)=\frac{1}{1+25x^2}.$$

在 $[-1,1]$ 上取 $n+1$ 个等距节点

$$x_k=-1+\frac{2}{n}k,\quad k=0,1,\cdots,n.$$

作 n 次 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$. 多项式序列 $\{L_n(x)\}$ 在 $[-1,1]$ 上并不收敛于 $f(x)$. 在图 7-3 中给出了 $f(x)$ 与 $L_n(x)$ 的图象. 可以看出，在 $[-0.2,0.2]$ 范围内 $L_n(x)$ 能较好地逼近 $f(x)$，而在其它点 $L_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 已无意义. 特别是在 $x=\pm1$ 附近 $L_n(x)$ 偏

离 $f(x)$ 甚远. 例如 $f(0.96)=0.04160$，而 $L_{10}(0.96)=1.80438$.

此外，高次插值多项式的计算量大，积累误差也大. 当局部插值节点处的函数值有微小偏差时，可能引起整个区间上函数值的很大变动.

鉴于以上原因，在实际应用中选用的插值多项式的次数一般都不超过六或七次，通常采用分段低次插值的方法来提高准确程度.

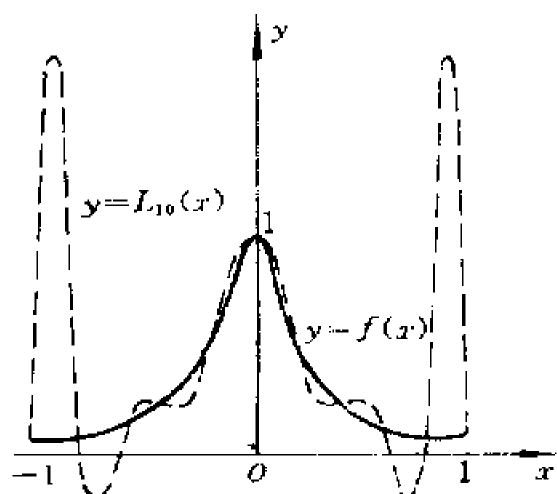


图 7-3

设插值节点为

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n, \tag{7.28}$$

$f(x)$在节点处的函数值为

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 0,1,\cdots,n. \tag{7.29}$$

在坐标平面上，用直线段连结相邻两点(x_k, y_k)和(x_{k+1}, y_{k+1})，$k=0,1,\cdots,n-1$，得一折线 $p(x)$，其方程为

$$p(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$k = 0,1,\cdots,n-1.$$

函数 $p(x)$称为函数 $f(x)$的满足条件(7.29)的分段线性插值函数，用 $p(x)$逼近 $f(x)$即用折线 $y=p(x)$近似代替曲线 $y=f(x)$.

分段线性插值函数不足之处在于它在节点处一般是不光滑的. 为了得到光滑的分段插值函数，可采用分段三次 Hermite 插值.

设已知函数 $y=f(x)$在节点(7.28)上的函数值和导数值

$$f(x_k)=y_k,\quad f'(x_k)=y'_k,\quad k=0,1,\cdots,n. \tag{7.30}$$

在每个子区间$[x_k,x_{k+1}]$上作满足上述条件的三次 Hermite 插值多项式. 利用(7.26)式得分段函数

$$\begin{aligned}p(x)=&\left(1-2\frac{x-x_k}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 y_k\\&+\left(1-2\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 y_{k+1}\\&+(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 y'_k\\&+(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 y'_{k+1},\\&x\in[x_k,x_{k+1}],\ k=0,1,\cdots,n-1.\end{aligned} \tag{7.31}$$

此函数称为$f(x)$满足插值条件(7.30)的分段三次 Hermite 插值函数. 若$f\in C^4[a,b]$,$x_k\in[a,b]$,$k=0,1,\cdots,n$,则由(7.27)式得到$f(x)$的分段三次 Hermite 插值函数$p(x)$的余项估计

$$\begin{aligned}|R(x)|&=|f(x)-p(x)|\\&\leqslant\frac{1}{4!}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(4)}(x)|\max_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2\\&=\frac{1}{4!2^4}(x_{k+1}-x_k)^4\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(4)}(x)|.\end{aligned}$$

§7.4 三次样条插值

分段三次 Hermite 插值保证了插值函数在各节点具有一阶导数. 对于某些实际问题,这仍然不能满足对曲线光滑性的要求. 例如,飞机外形的理论模线,船体放样型值线等曲线都要求有二阶的光滑度,即具有二阶连续导数. 工程技术人员在绘制这类流线型构件的外形轮廓线时,使用一种叫做"样条"的工具,它是一种具有弹性的细木条或有机玻璃条,用它把平面上给定的点(称为型值点)

连结起来，以保证所得曲线具有连续的曲率，从而具有连续二阶导数，然后沿着样条划出曲线. 这样作出的曲线称为样条曲线. 从力学角度来看，强迫样条经过某些点，相当于在这些点处对样条施加力的作用，使样条发生弯曲. 根据材料力学知识，当变形很小时，可以计算出每两点之间的曲线近似地是一个三次多项式. 这便是三次样条插值函数的实际背景.

一、三次样条插值的定义

定义 7.3 设 $y=f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的函数. 在 $[a,b]$ 上取定节点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

已知

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\cdots,n.$$

如果函数 $S(x)$ 满足

(1) $S(x_i)=y_i$, $i=0,1,\cdots,n$;

(2) $S\in C^2[a,b]$;

(3) 在每个子区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 上，$S(x)$ 是次数不超过 3 的多项式. 则称 $S(x)$ 是函数 $f(x)$ 以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为节点的**三次样条插值函数**.

由定义 7.3，为了确定 $S(x)$，可供利用的条件共有 $4n-2$ 个. 其中插值条件 $n+1$ 个；连续性条件有

$$S(x_k - 0) = S(x_k + 0),$$

$$S'(x_k - 0) = S'(x_k + 0),$$

$$S''(x_k - 0) = S''(x_k + 0), \quad k = 1,2,\cdots,n-1,$$

共 $3n-3$ 个. 然而，$S(x)$ 由 n 段次数不超过 3 的多项式组成，共有 $4n$ 个待定参数. 因此，为了确定函数 $S(x)$，还缺少 2 个条件. 通常是在区间 $[a,b]$ 的端点 $a=x_0$ 和 $b=x_n$ 上各附加一个条件. 在区间端点上的条件称为**边界条件**. $S(x_0)=y_0$ 和 $S(x_n)=y_n$ 就是两个边界条件. 常见的附加边界条件有三种，并由此提出以下三个类型的

插值问题.

问题Ⅰ 求满足附加边界条件

$$S'(x_0)=y'_0, \qquad S'(x_n)=y'_n$$

的三次样条插值函数 $S(x)$. 这个边界条件称为固定支边条件.

问题Ⅱ 求满足附加边界条件

$$S''(x_0)=y''_0, \qquad S''(x_n)=y''_n$$

的三次样条插值函数 $S(x)$,这个边界条件的特殊情况

$$S''(x_0)=S''(x_n)=0$$

称为自然边界条件.

问题Ⅲ 求满足附加边界条件

$$S(x_0)=S(x_n), \quad S'(x_0+0)=S'(x_n-0),$$

$$S''(x_0+0)=S''(x_n-0)$$

的三次样条插值函数 $S(x)$. 这是周期型问题. 适用于逼近周期函数或封闭曲线.

二、三次样条插值函数的构造方法

下面介绍构造三次样条插值函数的两种方法.

1. 用节点处的一阶导数表示的三次样条插值函数

记节点处的一阶导数值为

$$S'(x_k)=m_k, \quad k=0,1,\cdots,n.$$

当 m_k 都已知时,$S(x)$在$[x_k,x_{k+1}]$上是满足条件

$$S(x_k)=y_k, \quad S(x_{k+1})=y_{k+1},$$

$$S'(x_k)=m_k, \quad S'(x_{k+1})=m_{k+1}$$

的三次 Hermite 插值多项式. 由(7.31)式可知,在$[x_k,x_{k+1}]$上

$$\begin{aligned}S(x)=&\left(1-2\frac{x-x_k}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 y_k\\&+\left(1-2\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 y_{k+1}\\&+(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 m_k\end{aligned}$$

$$+ (x - x_{k+1})\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 m_{k+1}.$$

记 $h_k = x_{k+1} - x_k$. 由上式得

$$S(x) = \frac{1}{h_k^3}(x - x_{k+1})^2[h_k + 2(x - x_k)]y_k$$

$$+ \frac{1}{h_k^3}(x - x_k)^2[h_k + 2(x_{k+1} - x)]y_{k-1}$$

$$+ \frac{1}{h_k^2}(x - x_{k+1})^2(x - x_k)m_k$$

$$+ \frac{1}{h_k^2}(x - x_k)^2(x - x_{k+1})m_{k+1},$$

$$x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \qquad (7.32)$$

于是,只需求出诸 m_k 便可得到 $S(x)$.

为了确定 m_k,需要用到 $S(x)$的二阶导数在节点的连续性. 由(7.32)式,在$[x_k, x_{k+1}]$上

$$S''(x) = \frac{2}{h_k^2}(3x - x_k - 2x_{k+1})m_k$$

$$+ \frac{2}{h_k^2}(3x - 2x_k - x_{k+1})m_{k+1}$$

$$+ \frac{6}{h_k^3}(x_k + x_{k+1} - 2x)(y_{k+1} - y_k).$$

在$[x_{k-1}, x_k]$上

$$S''(x) = \frac{2}{h_{k-1}^2}(3x - x_{k-1} - 2x_k)m_{k-1}$$

$$+ \frac{2}{h_{k-1}^2}(3x - 2x_{k-1} - x_k)m_k$$

$$+ \frac{6}{h_{k-1}^3}(x_{k-1} + x_k - 2x)(y_k - y_{k-1}).$$

于是

$$S''(x_k + 0) = -\frac{4}{h_k}m_k - \frac{2}{h_k}m_{k+1} + \frac{6}{h_k^2}(y_{k+1} - y_k), \qquad (7.33)$$

$$S''(x_k-0)=\frac{2}{h_{k-1}}m_{k-1}+\frac{4}{h_{k-1}}m_k-\frac{6}{h_{k-1}^2}(y_k-y_{k-1}). \tag{7.34}$$

由 $S''(x)$ 在 x_k 处连续性条件

$$S''(x_k+0)=S''(x_k-0)$$

得到

$$\frac{1}{h_{k-1}}m_{k-1}+2\left(\frac{1}{h_{k-1}}+\frac{1}{h_k}\right)m_k+\frac{1}{h_k}m_{k+1}$$

$$=3\left[\frac{1}{h_k^2}(y_{k+1}-y_k)+\frac{1}{h_{k-1}^2}(y_k-y_{k-1})\right].$$

两端同时除以 $\frac{1}{h_{k-1}}+\frac{1}{h_k}$ 得

$$\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}m_{k-1}+2m_k+\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}-h_k}m_{k-1}$$

$$=3\left(\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}+\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}\right). \tag{7.35}$$

引入记号

$$\lambda_k=\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k},\quad \mu_k=\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k},$$

$$g_k=3(\lambda_k f[x_{k-1},x_k]+\mu_k f[x_k,x_{k+1}]),k=1,2,\cdots,n-1.$$

则(7.35)式可写成

$$\lambda_k m_{k-1}+2m_k+\mu_k m_{k+1}=g_k,\quad k=1,2,\cdots,n-1. \tag{7.36}$$

这是含有 $n+1$ 个未知量 $m_0,m_1,\cdots,m_n$ 的 $n-1$ 个方程的线性方程组. 要完全确定 $n+1$ 个未知量的值还需要两个边界条件.

(1) 对于问题 1

$$S'(x_0)=m_0,\quad S'(x_n)=m_n$$

是已知的. 这时, 方程组(7.36)中实际上只包含 $n-1$ 个未知量 $m_1,m_2,\cdots,m_{n-1}$. 它可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 m_0 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} m_n \end{bmatrix}. \tag{7.37}$$

这是一个三对角方程组，其系数矩阵是严格行对角占优的，因此存在唯一解，并可用追赶法求解.

(2) 对于问题Ⅱ

$$S''(x_0) = M_0, \quad S''(x_n) = M_n$$

是已知的. 在(7.33)式中令 $k=0$，在(7.34)中令 $k=n$，得到

$$2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] - \frac{h_0}{2}M_0, \tag{7.38}$$

$$m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \frac{h_{n-1}}{2}M_n. \tag{7.39}$$

与(7.36)联立，得到关于 $m_0, m_1, \cdots, m_n$ 的线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}, \tag{7.40}$$

其中

$$g_0 = 3f[x_0, x_1] - \frac{h_0}{2}M_0, \quad g_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \frac{h_{n-1}}{2}M_n.$$

方程组(7.40)也是系数矩阵严格行对角占优的三对角方程组，存在唯一解，并可用追赶法求解.

(3) 对于问题Ⅲ，有

$$y_0 = y_n, \; m_0 = m_n,$$

又由 $S''(x_0+0) = S''(x_n-0)$ 可推得

$$2m_0 + \mu_0 m_1 + \lambda_0 m_{n-1} = d_0 \tag{7.41}$$

其中

$$\mu_0 = \frac{h_{n-1}}{h_{n-1}+h_0}, \quad \lambda_0 = \frac{h_0}{h_{n-1}+h_0},$$

$$d_0 = 3(\lambda_0 f[x_{n-1},x_n] + \mu_0 f[x_0,x_1]).$$

将(7.14)与(7.36)联立,并把 m_n 换成 m_0 得线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_0 & & & \lambda_0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ \mu_{n-1} & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (7.42)$$

系数矩阵严格行对角占优,方程组存在唯一解.

例 7.6 已知函数 $y=f(x)$的一组数据如下,试求 $f(x)$在区间[0,3]上的三次样条插值函数.

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	3	4	6
$f'(x)$	1			0

解 此时 $n=3, m_0=1, m_3=0$,且

$$h_k = 1, \quad \lambda_k = \mu_k = \frac{1}{2}, \quad k = 1,2,$$

$$g_1 = 3\left[\frac{1}{2}(f(1)-f(0)) + \frac{1}{2}(f(2)-f(1))\right] = 6,$$

$$g_2 = 3\left[\frac{1}{2}(f(2)-f(1)) + \frac{1}{2}(f(3)-f(2))\right] = \frac{9}{2}.$$

代入(7.37)式得方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}.$$

解得 $m_1=\frac{7}{3}, m_2=\frac{5}{3}$. 代入(7.32)式得三次样条插值函数

$$S(x)=\begin{cases}-\frac{8}{3}x^3+\frac{14}{3}x^2+x & 当\ x\in[0,1] \\ 2x^3-\frac{28}{3}x^2+15x-\frac{14}{3} & 当\ x\in[1,2] \\ -\frac{7}{3}x^3+\frac{50}{3}x^2-37x+30 & 当\ x\in[2,3]\end{cases}.$$

2. 用节点处的二阶导数表示的三次样条插值函数

记节点处的二阶导数为

$$S''(x_k)=M_k,\quad k=0,1,\cdots,n.$$

在每个子区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 上，因为 $S(x)$ 是三次多项式，所以 $S''(x)$ 是线性函数，且

$$S''(x)=\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}M_k+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}M_{k+1}.$$

记 $h_k=x_{k+1}-x_k$，代入上式并积分得

$$S'(x)=-\frac{(x_{k+1}-x)^2}{2h_k}M_k+\frac{(x-x_k)^2}{2h_k}M_{k+1}+c_1,$$

$$S(x)=\frac{(x_{k+1}-x)^3}{6h_k}M_k+\frac{(x-x_k)^3}{6h_k}M_{k+1}+c_1x+c_2.$$

由

$$S(x_k)=y_k,\quad S(x_{k+1})=y_{k+1}$$

可定出

$$c_1=\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{h_k}{6}(M_{k+1}-M_k),$$

$$c_2=y_k-\frac{h_k^2}{6}M_k-\left[\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{h_k}{6}(M_{k+1}-M_k)\right]x_k.$$

因此

$$S'(x)=-\frac{(x_{k+1}-x)^2}{2h_k}M_k+\frac{(x-x_k)^2}{2h_k}M_{k+1}$$

$$+\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{h_k}{6}(M_{k+1}-M_k) \tag{7.43}$$

$$\begin{aligned}S(x)=&\frac{1}{6h_k}(x-x_k)(x-x_{k+1})(x-2x_k+x_{k+1})M_{k+1}\\&-\frac{1}{6h_k}(x-x_k)(x-x_{k+1})(x+x_k-2x_{k+1})M_k\\&+\frac{1}{h_k}[(x-x_k)y_{k+1}-(x-x_{k+1})y_k],\\&x\in[x_k,x_{k+1}],\ k=0,1,\cdots,n-1.\end{aligned} \tag{7.44}$$

于是，只需求出诸 M_k 便可得到 $S(x)$.

由 $S'(x)$在 x_k 处连续性条件

$$S'(x_k+0)=S'(x_k-0),$$

利用(7.43)式得到

$$\mu_k M_{k-1}+2M_k+\lambda_k M_{k+1}=d_k,\quad k=1,2,\cdots,n-1, \tag{7.45}$$

其中

$$\mu_k=\frac{h_{k-1}}{h_k+h_{k-1}},\quad \lambda_k=\frac{h_k}{h_k+h_{k-1}},$$

$$d_k=6f[x_{k-1},x_k,x_{k+1}].$$

(7.45)式给出了关于 $n+1$ 个未知量 $M_0,M_1,\cdots,M_n$ 的 $n-1$ 个方程，尚需附加边界条件，补充两个方程.

(1) 对于问题Ⅰ，已知

$$S'(x_0)=m_0,\ S'(x_n)=m_n.$$

利用(7.43)式得到

$$2M_0+M_1=d_0, \tag{7.46}$$

$$M_{n-1}+2M_n=d_n, \tag{7.47}$$

其中

$$d_0=\frac{6}{h_0}(f[x_0,x_1]-m_0),$$

$$d_n = \frac{6}{h_{n-1}}(m_n - f[x_{n-1}, x_n]).$$

将方程(7.45)～(7.47)联立得方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}. \tag{7.48}$$

这是系数矩阵严格行对角占优的三对角方程组，存在唯一解，且可用追赶法求解.

(2) 对于问题Ⅱ，

$$S''(x_0) = M_0, \quad S''(x_n) = M_n$$

是已知的.(7.45)成为含有 $n-1$ 个未知量的方程组，其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 M_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} M_n \end{bmatrix}. \tag{7.49}$$

这也是系数矩阵严格行对角占优的三对角方程组，存在唯一解，可用追赶法求解.

(3) 对于问题Ⅲ，有

$$y_0 = y_n, \quad M_0 = M_n,$$

且由 $S'(x_0+0)=S'(x_n-0)$ 推得

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 + \mu_0 M_{n-1} = d_0, \tag{7.50}$$

其中

$$\lambda_0 = \frac{h_0}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \mu_0 = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}},$$

$$d_0 = \frac{6}{h_0 + h_{n-1}}(f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]).$$

(7.45)与(7.50)联立得方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \mu_0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ \lambda_{n-1} & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (7.51)$$

其系数矩阵严格行对角占优，方程组存在唯一解.

三、插值余项

三次样条插值函数误差的分析过程比较复杂，这里只给出有关结论.

定理 7.9 设 $f\in C^4[a,b]$，$S(x)$是问题Ⅰ或问题Ⅱ的插值函数，则有估计式

$$\| f - S \|_\infty \leqslant \frac{5}{384} \| f^{(4)} \|_\infty h^4,$$

$$\| f' - S' \|_\infty \leqslant \frac{1}{24} \| f^{(4)} \|_\infty h^3,$$

$$\| f'' - S'' \|_\infty \leqslant \frac{1}{8} \| f^{(4)} \|_\infty h^2,$$

其中 $h = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1} h_k$.

根据定理 7.9，如果 $f\in C^4[a,b]$，则三次样条插值函数 $S(x)$ 以及它的导数 $S'(x)$和 $S''(x)$，当 $h\to 0$ 时在$[a,b]$上分别一致收敛于 $f(x)$，$f'(x)$和 $f''(x)$，且有

$$\| f - S \|_\infty = O(h^4), \quad \| f' - S' \|_\infty = O(h^3),$$

$$\| f'' - S'' \|_\infty = O(h^2).$$

习 题 七

1. 给定数表：

x	10	11	12	13	14
$f(x)$	210	230	240	235	230

试建立 $f(x)$ 的四次插值多项式.

2. 设 $l_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 是以互异的 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，证明：

(1) $\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^m l_k(x) \equiv x^m,\ m=0,1,\cdots,n$;

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n} l_k(x) \equiv 1$;

(3) $\sum\limits_{k=0}^{n} (x_k-x)^m l_k(x) \equiv 0,\ m=1,2,\cdots,n$.

3. 给定数表：

x	0.10	0.15	0.25	0.30
e^{-x}	0.904837	0.860708	0.778801	0.740818

(1) 用线性插值计算 $e^{-0.14}$ 的近似值，并估计截断误差；

(2) 用二次插值计算 $e^{-0.23}$ 的近似值，并估计截断误差.

4. 给定数表：

x	2	4	6	8	10	12	14
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

(1) 要用线性插值计算 $f(7.5)$ 和 $f(11.8)$ 的近似值，试分别写出所用的线性插值公式；

(2) 要用二次插值计算 $f(7.5)$ 和 $f(11.8)$ 的近似值，试分别写出所用的二次插值公式；

(3) 要用三次插值计算 $f(7.5)$ 和 $f(11.8)$ 的近似值，试分别写出所用的三次插值公式.

5. 设 $f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求差商

(1) $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$；

(2) $f[2^0,2^1,\cdots,2^k]$，$k\geqslant 8$.

6. 证明：若 $f(x)=u(x)v(x)$，则

$$f[x_0,x_1]=u[x_0]v[x_0,x_1]+u[x_0,x_1]v[x_1]$$

而且，一般地

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}u[x_0,x_1,\cdots,x_j]v[x_j,x_{j+1},\cdots,x_k].$$

7. 给定数表：

x	75	76	77	78	79	81	82
$f(x)$	2.76806	2.83267	2.90256	2.97857	3.06173	3.25530	3.36987

试用四次 Newton 插值多项式计算 $f(75.54)$和(81.12)

8. 证明：

(1) $\Delta(f_kg_k)=f_k\Delta g_k+g_{k+1}\Delta f_k$；

(2) $\Delta\left(\dfrac{f_k}{g_k}\right)=\dfrac{g_k\Delta f_k-f_k\Delta g_k}{g_kg_{k+1}}$；

(3) $\Delta(\nabla f_k)=\Delta(\nabla f_k)=\delta^2 f_k$.

9. 给定数表：

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1.00000	1.22140	1.49182	1.82212	2.22554

用四次 Newton 插值多项式求 $f(0.05)$及 $f(0.65)$的近似值.

10. 已知

$$f(1)=2,\quad f(2)=3,\quad f'(1)=0,\quad f'(2)=-1.$$

建立 $f(x)$的 Hermite 插值多项式，并求 $f(1.2)$的近似值.

11. 已知

$$f(5.0)=4.4,\quad f(5.2)=3.8,\quad f(5.4)=3.2,$$

$$f'(5.0)=-1.2,\quad f'(5.2)=-1.0,\quad f'(5.4)=-0.6.$$

建立 $f(x)$的 Hermite 插值多项式，并求 $f(5.1)$的近似值.

12. 试构造一个 x 的多项式 $p\in P_4[0,2]$，使其满足

$$p(0)=f(0)=1,\quad p(1)=f(1)=2,\quad p(2)=f(2)=1,$$

$$p'(1)=f'(1)=0,\quad p'(2)=f'(2)=-1.$$

13. 已知

$$f(0.1)=2,\quad f(0.2)=4,\quad f(0.3)=6,$$

求函数 $f(x)$在所给节点上的三次样条插值函数 $S(x)$,使其满足边界条件

(1) $S'(0.1)=1$, $S'(0.3)=-1$;

(2) $S''(0.1)=0$, $S''(0.3)=1$.

第八章　数值积分和数值微分

在生产与科研中，常常需要计算函数的积分或导数. 然而，在很多情况下，函数关系只能用一个数据表表示，而不知道函数的解析表达式. 有时，即使能用解析表达式表示函数关系，也会因为表达式过于复杂而难以求出原函数和导函数，因而不能用来实际计算积分和导数. 本章将介绍求积分和导数的实用数值方法.

§8.1　数值求积公式的一般形式及其代数精度

一、数值求积公式的一般形式

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上定积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

的几何意义为曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴之间以直线 $x=a$ 和 $x=b$ 为界的曲边梯形的代数面积. 为了计算积分的近似值，用分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 把区间 $[a,b]$ 分为 n 份，相应地曲边梯形被分为 n 个小曲边梯形. 如果在计算第 k 个小曲边梯形面积时，用矩形面积 $(x_{k+1}-x_k)f(x_k)$ 近似代替，则有

$$I(f)\approx\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(x_k).$$

如果第 k 个小曲边梯形的面积用直边梯形面积 $\frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k)\cdot[f(x_k)+f(x_{k+1})]$ 近似代替，则有

$$I(f)\approx\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k)[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

$$= \frac{x_1 - x_0}{2} f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2} f(x_k) + \frac{x_n - x_{n-1}}{2} f(x_n).$$

还可用其它方法得出 $I(f)$ 的近似计算公式. 这些计算定积分近似值的公式都有共同的形式,即都用 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$ 的某种线性组合作为 $I(f)$ 的近似值.

数值求积公式的一般形式为

$$I(f) \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \tag{8.1}$$

其中 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 满足

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b,$$

称为**求积节点**. $A_k(k=0,1,\cdots,n)$ 称为**求积系数**,它只与求积节点的选取有关,而与被积函数 $f(x)$ 无关. 称

$$R(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

为求积公式(8.1)的**截断误差**或余项.

二、求积公式的代数精度

求积公式(8.1)作为定积分 $I(f)$ 的近似,其准确程度与 $f(x)$ 有关. 自然,希望它对尽可能多的被积函数 $f(x)$ 是精确的. 为此引入代数精度概念.

定义 8.1 如果求积公式(8.1)对一切不高于 m 次的多项式都成为等式,而对于某个 $m+1$ 次多项式不能成为等式,则称这个求积公式具有 **m 次代数精度**.

判定求积公式(8.1)的代数精度有以下结论(证明留给读者).

定理 8.1 求积公式(8.1)具有 m 次代数精度的充分必要条件是当 $f(x)$ 为 $1, x, x^2, \cdots, x^m$ 时求积公式(8.1)成为等式,而当 $f(x)$ 为 x^{m+1} 时求积公式不能成为等式.

例 8.1 判定求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

的代数精度.

解 记

$$I(f)=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x,\quad I_1(f)=f(-\frac{\sqrt{3}}{3})+f(\frac{\sqrt{3}}{3}),$$

则

$$I(1)=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2,\qquad I_1(1)=1+1=2,$$

$$I(x)=\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x=0,\qquad I_1(x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=0,$$

$$I(x^2)=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3},\quad I_1(x^2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

$$I(x^3)=\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=0,\qquad I_1(x^3)=-\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}=0,$$

$$I(x^4)=\int_{-1}^{1}x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5},\quad I_1(x^4)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}.$$

因此

$$I(x^r)=I_1(x^r),\quad r=0,1,2,3,\quad I(x^4)\neq I_1(x^4).$$

这表明求积公式具有三次代数精度.

例 8.2 确定求积公式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(0)+\frac{2}{3}f(x_1)+A_2f(1)$$

中的参数 x_1, A_0 和 A_2,使其代数精度不小于二次,并确定其代数精度.

解 令求积公式当 $f(x)$ 为 1, x 和 x^2 时成为等式,得到

$$\begin{cases}A_0+\dfrac{2}{3}+A_2=1\\ \dfrac{2}{3}x_1+A_2=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{3}x_1^2+A_2=\dfrac{1}{3}\end{cases}.$$

此方程组存在唯一解 $x_1 = \frac{1}{2}$, $A_0 = A_2 = \frac{1}{6}$. 代入求积公式得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}f(0) + \frac{2}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}f(1).$$

对于 $f(x)=x^3$，由于

$$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{6}f(0) + \frac{2}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}f(1) = \frac{1}{4},$$

所以求得的求积公式对 x^3 成为等式. 对于 $f(x)=x^4$，由于

$$\int_0^1 x^4\mathrm{d}x = \frac{1}{5},$$

$$\frac{1}{6}f(0) + \frac{2}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}f(1) = \frac{5}{24},$$

所以求积公式对 x^4 不能成为等式. 因此，所求得的求积公式具有三次代数精度.

§ 8.2　Newton-Cotes 公式

一、插值型求积公式

在区间$[a,b]$上给定求积节点 x_k 及函数值 $f(x_k)$, $k=0,1,\cdots,n$. 构造 $f(x)$的 Lagrange 插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x)f(x_k),$$

其中 $l_k(x)$是 Lagrange 插值基函数

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 0,1,\cdots,n.$$

用 $L_n(x)$近似代替 $f(x)$，在区间$[a,b]$上作定积分，得到近似等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \qquad (8.2$$

其中

$$A_k = \int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x, \quad k = 0,1,\cdots,n. \tag{8.3}$$

(8.2)式称为**插值型求积公式**.

由 Lagrange 插值多项式的余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i),$$

得到插值型求积公式(8.2)的**截断误差**

$$R(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\mathrm{d}x, \tag{8.4}$$

其中 $\xi \in (a,b)$ 且依赖于 x.

由余项公式(8.4)可以看出,$n+1$ 个求积节点构造的插值型求积公式(8.2)至少具有 n 次代数精度.

当 $f(x) \equiv 1$ 时,公式(8.2)应成为等式.因此,插值型求积公式的求积系数满足

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = b - a.$$

二、Newton-Cotes 公式

如果求积节点是等距节点,且 $x_0 = a, x_n = b$,即

$$x_k = a + kh, \quad k = 0,1,\cdots,n,$$

其中步长 $h = \dfrac{b-a}{n}$,作变换 $x = a + th$,则求积系数

$$A_k = \int_a^b \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}\mathrm{d}x = h\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \frac{t - i}{k - i}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}h}{k!(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(t - i)\mathrm{d}t.$$

记

$$C_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!n}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(t - i)\mathrm{d}t, \quad k = 0,1,\cdots,n, \tag{8.5}$$

则

$$A_k = (b-a)C_k^{(n)}.$$

于是,求积公式(8.2)可写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k). \tag{8.6}$$

(8.6)式称为 **Newton-Cotes** 公式,其中系数 $C_k^{(n)}$ 由(8.5)式确定,称为 **Cotes 系数**.

由(8.5)式不难看出,Cotes 系数只取决于 n,而与积分区间 $[a,b]$ 及被积函数 $f(x)$ 均无关. 表 8-1 给出了部分 Cotes 系数的值.

表 8-1

n	$C_k^{(n)}$
1	$\frac{1}{2},\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6},\frac{4}{6},\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}$
4	$\frac{7}{90},\frac{16}{45},\frac{2}{15},\frac{16}{45},\frac{7}{90}$
5	$\frac{19}{288},\frac{25}{96},\frac{25}{144},\frac{25}{144},\frac{25}{96},\frac{19}{288}$
6	$\frac{41}{840},\frac{9}{35},\frac{9}{280},\frac{34}{105},\frac{9}{280},\frac{9}{35},\frac{41}{840}$
7	$\frac{751}{17280},\frac{3577}{17280},\frac{1323}{17280},\frac{2989}{17280},\frac{2989}{17280},\frac{1323}{17280},\frac{3577}{17280},\frac{751}{17280}$
8	$\frac{989}{28350},\frac{5888}{28350},\frac{-928}{28350},\frac{10496}{28350},\frac{-4540}{28350},\frac{10496}{28350},\frac{-928}{28350},\frac{5888}{28350},\frac{989}{28350}$

定理 8.2　Cotes 系数满足

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} = 1;\quad C_k^{(n)} = C_{n-k}^{(n)},\quad k = 0,1,\cdots,n.$$

证　由 $\sum_{k=0}^{n} A_k = (b-a)$ 和 $A_k = (b-a)C_k^{(n)}$ 得到

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} = 1.$$

由(8.5)式得到

$$C_{n-k}^{(n)} = \frac{(-1)^k}{(n-k)!k!n}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq n-k}}^{n} (t-i)\mathrm{d}t.$$

作变换 $t=n-s$，得

$$\begin{aligned} C_{n-k}^{(n)} &= \frac{(-1)^{k-n}}{(n-k)!k!n}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq n-k}}^{n} [s-(n-i)]\mathrm{d}s \\ &= \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!k!n}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (s-j)\mathrm{d}s \\ &= C_k^{(n)}. \end{aligned}$$

证毕

在(8.4)式中，令 $x_i=a+ih$，并作变换 $x=a+th$，得到 Newton-Cotes 公式的截断误差

$$R(f) = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n f^{(n+1)}(\xi)\prod_{i=0}^{n}(t-i)\mathrm{d}t, \qquad (8.7)$$

其中 $\xi\in(a,b)$ 且依赖于 t.

Newton-Cotes 公式是等距节点的插值型求积公式. 因此，$n+1$ 个节点的 Newton-Cotes 公式至少具有 n 次代数精度. 进一步还有如下结论.

定理 8.3　当 n 为偶数时，Newton-Cotes 公式至少具有 $n+1$ 次代数精度.

证　对任意 $n+1$ 次多项式

$$p_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k,$$

有

$$p_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!a_{n+1}.$$

于是

$$R(p_{n+1}) = a_{n+1}h^{n+2}\int_0^n \prod_{i=0}^{n} (t-i)\mathrm{d}t.$$

设 $n=2l, l\in N$. 对上式积分作变换 $s=t-l$，则

$$R(p_{n+1}) = a_{n+1}h^{n+2}\int_{-l}^{l} \prod_{i=0}^{2l} (s+l-i)\mathrm{d}s.$$

记

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \prod_{i=0}^{2l} (s+l-i) \\ &= (s+l)(s+l-1)\cdots(s-l+1)(s-l).\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\varphi(-s) &= -\prod_{i=0}^{2l} (s-l+i) \\ &= -(s-l)(s-l+1)\cdots(s+l-1)(s+l) \\ &= -\varphi(s).\end{aligned}$$

即 $\varphi(s)$是奇函数. 从而

$$R(p_{n+1}) = 0,$$

Newton-Cotes 公式对 $p_{n+1}(x)$成为等式. 因此，当 n 为偶数时，Newton-Cotes 公式至少具有 $n+1$ 次代数精度， 证毕.

当 $n=1$ 时，只有两个求积节点 $x_0=a$ 和 $x_1=b$，Newton-Cotes 公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]. \tag{8.8}$$

(8.8)式的几何意义是用梯形面积$\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$近似曲边梯

形面积 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，如图 8-1. 因此，(8.8)式称为**梯形公式**.

梯形公式(8.8)是用线性插值函数

$$L_1(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

近似代替被积函数 $f(x)$ 而得到的. 因此其截断误差

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b [f(x) - L_1(x)]\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b (x-a)(x-b)f[a,b,x]\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

现设 $f \in C^2[a,b]$. 由积分中值定理，存在 $c \in [a,b]$，使得

$$\begin{aligned} R(f) &= f[a,b,c]\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{6}(b-a)^3 f[a,b,c]. \end{aligned}$$

再根据差商与导数的关系(7.13)式，存在 $\xi \in (a,b)$，使得

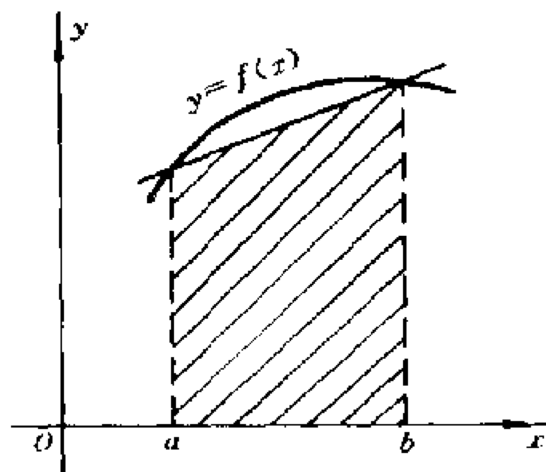


图 8-1

$$f[a,b,c] = \frac{1}{2}f''(\xi).$$

于是

$$R(f) = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi).$$

因此，梯形公式(8.8)具有一次代数精度.

当 $n=2$ 时，有三个求积节点 $x_0 = a, x_1 = \frac{1}{2}(a+b), x_2 = b$，Newton-Cotes 公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \tag{8.9}$$

称之为**抛物线公式**或 **Simpson 公式**. 它具有三次代数精度. 当 $f \in$

$C^4[a,b]$时，它的截断误差为

$$R(f)=-\frac{1}{2880}(b-a)^5f^{(4)}(\xi),\ \xi\in(a,b).$$

当 $n=4$时，Newton-Cotes 公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$\approx\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)],$$
(8.10)

称之为 **Cotes 公式**. 它具有五次代数精度. 当 $f\in C^6[a,b]$时，其截断误差为

$$R(f)=-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6f^{(6)}(\xi),\ \xi\in(a,b). \tag{8.11}$$

用 Newton-Cotes 公式计算定积分的过程中，难免出现舍入误差. 下面讨论舍入误差对计算结果的影响.

设在计算过程中 $f(x_k)$有舍入误差 ε_k，即实际参加运算的是 $f(x_k)$的近似值 $\tilde{f}(x_k)=f(x_k)-\varepsilon_k$, $k=0,1,\cdots,n$. 记

$$\varepsilon=\max_{0\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_k|$$

于是，利用 Newton-Cotes 公式计算积分近似值时产生误差的绝对值为

$$\left|(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_k)-(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}\tilde{f}(x_k)\right|$$
$$\leqslant(b-a)\sum_{k=0}^{n}|C_k^{(n)}||\varepsilon_k|\leqslant\varepsilon(b-a)\sum_{k=0}^{n}|C_k^{(n)}|.$$

当 $n<8$时，$C_k^{(n)}$ 均为正实数. 利用定理8.2得到

$$\varepsilon(b-a)\sum_{k=0}^{n}|C_k^{(n)}|=\varepsilon(b-a).$$

由此可见，此时舍入误差对计算结果的影响很容易得到控制. 为了使由舍入误差的影响而产生的误差之绝对值不超过 ε_0，只需每个

$f(x_k)$的舍入误差的绝对值不超过$\frac{\varepsilon_0}{b-a}$. 当 $n \geqslant 8$时,因 $C_k^{(n)}$ 有正有负,尽管 $\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} = 1$,但 $\sum_{k=0}^{n} |C_k^{(n)}|$仍可能很大. 所以,$n \geqslant 8$的 Newton-Cotes 公式在实际计算中通常不被采用.

三、复化求积公式

如上所述,多节点的 Newton-Cotes 求积公式不宜使用. 但是,当积分区间的长度较大时,少节点的 Newton-Cotes 求积公式的截断误差比较大. 为了提高数值积分的精确度,取步长 $h = \frac{b-a}{n}$,将积分区间$[a,b]$等分为 n 个子区间. 在每个子区间$[x_k, x_{k+1}]$上用低阶的 Newton-Cotes 公式求出 $f(x)$在这个子区间上积分的近似值 I_k,再将它们相加得

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} I_k.$$

用 $I_n(f)$作为所求积分的近似值,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx I_n(f).$$

这种求积分近似值的方法称为**复化求积法**.

如果在每个子区间$[x_k, x_{k+1}]$上用梯形公式(8.8),得

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})].$$

于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k) + f(x_{k+1})].$$

整理得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]. \quad (8.12)$$

此式称为**复化梯形公式**. 记

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]. \tag{8.13}$$

当 $f\in C^2[a,b]$ 时，复化梯形公式(8.12)的截断误差

$$R(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{h^3}{12}f''(\xi_k)\right], \xi_k \in (x_k, x_{k+1}).$$

再利用连续函数的性质，得到

$$R(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi), \qquad \xi \in (a,b).$$

如果在每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上用 Simpson 公式(8.9)，则得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})],$$

其中

$$x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{1}{2}h = x_0 + (k + \frac{1}{2})h.$$

整理得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right], \tag{8.14}$$

称之为**复化 Simpson 公式**. 记

$$S_n = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]. \tag{8.15}$$

当 $f\in C^4[a,b]$ 时，复化 Simpson 公式(8.14)的截断误差

$$R(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\xi),$$

其中 $\xi \in (a,b)$.

类似地，可得**复化 Cotes 公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{90}\left[7f(a)+32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{4}})+12\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})\right.$$

$$\left.+32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{3}{4}})+14\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+7f(b)\right]. \quad (8.16)$$

其中

$$x_{k+\frac{i}{4}} = x_k + \frac{i}{4}h = x_0 + (k + \frac{i}{4})h, \quad i = 1,2,3.$$

记

$$C_n = \frac{h}{90}\left[7f(a) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})\right.$$

$$\left.+ 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 7f(b)\right]. \quad (8.17)$$

复化 Cotes 公式(8.16)的截断误差

$$R(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - C_n = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\xi),$$

其中 $\xi \in (a,b)$.

使用复化求积法计算积分近似值时，可以根据求积公式的截断误差进行先验估计，以确定合适的等分步长 h. 但是截断误差的表达式中包含有被积函数的导数，而估计被积函数导数的最大值往往是很困难的，特别是在被积函数表达式未知的情况下更是不可能的. 在实际计算时可采用步长逐次减半求积法来解决这一矛盾. 下面针对复化梯形公式介绍这种步长逐次减半求积法.

把积分区间$[a,b]$分成 n 等份时，步长 $h = \frac{b-a}{n}$. 用复化梯形公式，$f(x)$在$[a,b]$上积分的近似值为

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right].$$

再把步长减半，即把区间$[a,b]$分成$2n$ 等份. 用复化梯形公式得积分的近似值为

$$T_{2n}=\frac{h}{4}\Big[f(a)+2\sum_{k=1}^{2n-1}f(x_{\frac{1}{2}k})+f(b)\Big]$$

$$=\frac{h}{4}\Big[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+2\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(b)\Big].$$

于是得到递推公式

$$T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}}). \tag{8.18}$$

由复化梯形公式的截断误差表达式得到

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=T_n-\frac{b-a}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f''(\xi_1),\xi_1\in(a,b),$$

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=T_{2n}-\frac{b-a}{12}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 f''(\xi_2),\xi_2\in(a,b).$$

如果 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上变化不大，则有 $f''(\xi_1)\approx f''(\xi_2)$. 此时，由以上两式得到

$$\frac{I(f)-T_n}{I(f)-T_{2n}}\approx 4,$$

即有

$$I(f)\approx T_{2n}+\frac{1}{4-1}(T_{2n}-T_n). \tag{8.19}$$

这说明 T_{2n} 作为积分 $I(f)$ 的近似值，其截断误差近似为 $\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$. 在实际计算时，利用递推公式(8.18)逐次计算 $T_1,T_2,T_{2^2},T_{2^3},\cdots$，并用 $|T_{2n}-T_n|$ 检验计算结果 T_{2n} 是否达到精度要求.

例 8.3 用复化梯形公式和步长逐次减半法计算

$$I=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,$$

要求误差不超过 0.5×10^{-6}.

解 利用公式(8.18)进行递推计算，所得结果列于下表：

$2n$	T_{2n}	$\lvert T_{2n}-T_n \rvert$	$2n$	T_{2n}	$\lvert T_{2n}-T_n \rvert$
2^0	0.9207355		2^5	0.9460586	0.0000736
2^1	0.9397933	0.0190578	2^6	0.9460769	0.0000183
2^2	0.9445135	0.0047202	2^7	0.9460815	0.0000046
2^3	0.9456909	0.0011774	2^8	0.9460827	0.0000012
2^4	0.9459850	0.0002941	2^9	0.9460830	0.0000003

$I \approx 0.9460830.$

进行类似的推导可知，对于复化 Simpson 公式，如果 $f^{(4)}(x)$ 在$[a,b]$上变化不大，则有

$$I(f) \approx S_{2n} + \frac{1}{4^2 - 1}(S_{2n} - S_n) . \tag{8.20}$$

对于复化 Cotes 公式，如果 $f^{(6)}(x)$在$[a,b]$上变化不大，则有

$$I(f) \approx C_{2n} + \frac{1}{4^3 - 1}(C_{2n} - C_n). \tag{8.21}$$

§8.3 Romberg 算法

由(8.19)式可以看出，把积分区间$[a,b]$分成 n 等份时，由复化梯形公式计算的 $I(f)$的近似值 T_{2n}的误差大致等于$\frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$，如果用这个误差作为 T_{2n}的一种补偿，即用

$$T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}$$

作为积分 $I(f)$的近似值，则可大大提高其精确程度，而由(8.13)和(8.18)式可知

$$\frac{1}{3}(4T_{2n} - T_n) = \frac{1}{3}T_n + \frac{2(b-a)}{3n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})\right].$$

与(8.15)式比较，得

$$S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{4-1} \tag{8.22}$$

这说明将步长减半前后计算出来的值 T_n 和 T_{2n} 按(8.22)式作线性组合便得到复化 Simpson 公式中 S_n 的值.

同样，由(8.20)式可知

$$S_{2n} + \frac{S_{2n} - S_n}{4^2 - 1} = \frac{4^2 S_{2n} - S_n}{4^2 - 1}$$

是比 S_{2n} 更精确的 $I(f)$ 的近似值. 而利用(8.15)和(8.17)式可推得这个值就是 C_n，即有

$$C_n = \frac{4^2 S_{2n} - S_n}{4^2 - 1}. \tag{8.23}$$

而由(8.21)式可知

$$C_{2n} + \frac{C_{2n} - C_n}{4^3 - 1} = \frac{4^3 C_{2n} - C_n}{4^3 - 1}$$

是比 C_{2n} 更精确的近似值. 把它记为 R_n，即

$$R_n = \frac{4^3 C_{2n} - C_n}{4^3 - 1}. \tag{8.24}$$

值得指出的是，根据(8.22)，(8.23)和(8.24)式，由序列 $\{T_{2^k}\}$ 就可直接逐次求得序列 $\{S_{2^k}\}$，$\{C_{2^k}\}$ 和 $\{R_{2^k}\}$，像这样用积分的若干个近似值推算出更精确近似值的方法称为**外推方法**. 序列 $\{T_{2^k}\}$，$\{S_{2^k}\}$，$\{C_{2^k}\}$ 和 $\{R_{2^k}\}$ 分别称为梯形序列，Simpson 序列，Cotes 序列和 Romberg 序列. 由 Romberg 序列还可以继续进行外推，得到新的求积序列. 但是，继续外推构造出来新的求积序列与原来序列差别不大，因此通常只外推到 Romberg 序列. 利用 Romberg 序列求积分的算法称为 **Romberg 算法**，公式(8.24)称为 **Romberg 公式**.

Romberg 算法的计算流程见下表,其中ⓘ的 i 表示计算次序.

k	T_{2^k}	S_{2^k}	C_{2^k}	R_{2^k}
0	①T_1	③S_1	⑥C_1	⑩R_1
1	②T_2	⑤S_2	⑨C_2	⑭R_2
2	④T_4	⑧S_4	⑬C_4	
3	⑦T_8	⑫S_8		
4	⑪T_{16}			
⋮				

例 8.4　用 Romberg 算法计算

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,$$

要求误差不超过0.5×10^{-6}.

解　计算结果列于下表:

k	T_{2^k}	S_{2^k}	C_{2^k}	R_{2^k}
0	0.9207355	0.9461459	0.9460830	0.9460831
1	0.9397933	0.9460869	0.9460831	0.9460830
2	0.9445135	0.9460834	0.9460830	
3	0.9456909	0.9460830		
4	0.9459850			

由于

$$|R_2-R_1|=0.1\times 10^{-6},$$

所以

$$I\approx R_2=0.9460830.$$

与例8.3比较,这里只用了 T_1,T_2,T_4,T_8和 T_{16},经过外推到R_2便得到所需结果,计算工作量大为减少.

§ 8.4 Gauss 型求积公式

一、一般理论

设要计算积分

$$I(f)=\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $\rho(x)$是区间(a,b)上的权函数.在积分区间$[a,b]$上取 $n+1$个互异节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$.对 $f(x)$进行 Lagrange 插值,得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)f(x_k)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x),$$

其中 $\xi\in(a,b)$,而

$$l_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i},\quad \omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

由此得到插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k), \tag{8.25}$$

其中

$$A_k=\int_a^b \rho(x)l_k(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\rho(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x)}\mathrm{d}x. \tag{8.26}$$

截断误差为

$$R(f)=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\rho(x)\omega(x)\mathrm{d}x. \tag{8.27}$$

由(8.27)式可以看出,无论求积节点如何选择,对于任意 $f\in P_n[a,b]$求积公式(8.25)都成为等式,因此求积公式(8.25)至少具有 n 次代数精度.此外,还有如下结论.

定理 8.4 求积公式(8.25)的代数精度最高不超过$2n+1$次.

证 取 $f(x)=\omega^2(x)$,则 $f\in P_{2n+2}[a,b]$且只在 $x_0,x_1,\cdots,x_n$

处等于零，因此

$$\int_a^b \rho(x) f(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x) \omega^2(x) \mathrm{d}x > 0 .$$

而

$$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = 0 ,$$

所以对 $f(x) = \omega^2(x)$ 求积公式(8.25)不成为等式，故其代数精度不超过$2n+1$次.　　　　证毕.

定义 8.2　如果求积公式(8.25)具有$2n+1$次代数精度，则称它为 **Gauss 型求积公式**，并称其求积节点为 **Gauss 点**.

求积公式(8.25)是否为 Gauss 型求积公式，取决于求积节点的选择.

定理 8.5　求积公式(8.25)为Gauss 型求积公式的充分必要条件是求积节点是积分区间上带权 $\rho(x)$的正交多项式系$\{p_n(x)\}$中 $n+1$次多项式 $p_{n+1}(x)$的 $n+1$个零点.

证　必要性. 对任意 $p \in P_n[a,b]$，$\omega(x)p(x)$是次数不超过$2n+1$的多项式. 因为求积公式(8.25)是 Gauss 型求积公式，其代数精度为$2n+1$次，所以有

$$\int_a^b \rho(x) \omega(x) p(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k \omega(x_k) p(x_k) = 0 .$$

这说明 $\omega(x)$与任意次数不超过 n 的多项式都是带权 $\rho(x)$正交的. 因此存在常数 $\alpha \neq 0$使得

$$\omega(x) = \alpha p_{n+1}(x) .$$

故 $\omega(x)$与 $p_{n+1}(x)$有相同的零点，而 $\omega(x)$的全部零点恰是求积公式的全部求积节点，所以 $n+1$个求积节点恰是 $p_{n+1}(x)$的 $n+1$个零点.

充分性. 对任意 $p \in P_{2n+1}[a,b]$，用 $p_{n+1}(x)$除 $p(x)$，设商为 $q(x)$，余项为 $r(x)$，则

$$p(x) = q(x) p_{n+1}(x) + r(x),$$

且 $q, r \in P_n[a,b]$. 由正交多项式的性质得

$$\int_a^b \rho(x)p(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x.$$

而由 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$是 $p_{n+1}(x)$的零点得

$$\sum_{k=0}^{n} A_k p(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k r(x_k).$$

又由 $r \in P_n[a,b]$得到

$$\int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k r(x_k),$$

因此

$$\int_a^b \rho(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k p(x_k).$$

这说明求积公式(8.25)对任意次数不超过$2n+1$的多项式都成为等式,因此它具有$2n+1$次代数精度,是 Gauss 型求积公式. 证毕.

将 $\omega(x)=a p_{n+1}(x)$代入(8.26)式得到用正交多项式确定求积系数的公式

$$A_k = \int_a^b \frac{\rho(x)p_{n+1}(x)}{(x-x_k)p'_{n+1}(x)}\mathrm{d}x. \qquad (8.28)$$

现在推导 Gauss 型求积公式截断误差的表达式.

以 Gauss 型求积公式的节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值节点,对函数 $f(x)$作次数不超过$2n+1$的 Hermite 插值多项式 $H(x)$,则

$$H(x_k)=f(x_k), \quad H'(x_k)=f'(x_k), \quad k=0,1,\cdots,n.$$

因为 Gauss 型求积公式具有$2n+1$次代数精度,所以对于多项式 $H(x)$,Gauss 型求积公式成为等式,即有

$$\int_a^b \rho(x)H(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k H(x_k).$$

于是由

$$f(x) = H(x) + \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega^2(x)$$

得到 Gauss 型求积公式(8.25)的截断误差

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b \rho(x) f(x) \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \\ &= \int_a^b \rho(x) f(x) \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k H(x_k) \\ &= \int_a^b \rho(x) [f(x) - H(x)] \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \rho(x) \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega^2(x) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

其中 $\xi \in (a,b)$. 再利用积分中值定理得

$$R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b \rho(x) \omega^2(x) \mathrm{d}x,$$

其中 $\eta \in (a,b)$. 若将 $\omega(x) = \alpha p_{n+1}(x)$ 代入上式，则截断误差又可表为

$$R(f) = \alpha^2 \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b \rho(x) p_{n+1}^2(x) \mathrm{d}x. \tag{8.29}$$

定理 8.6　如果求积公式(8.25)是 Gauss 型求积公式，则其求积系数满足

(1) $A_k > 0,\ k = 0,1,\cdots,n$;

(2) $\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b \rho(x) \mathrm{d}x.$

证　(1) 取

$$\varphi_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)^2}{(x_k - x_i)^2}, \quad k = 0,1,\cdots,n,$$

则 $\varphi_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 都是 $2n$ 次多项式，Gauss 型求积公式对它们都成为等式，即有

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_k(x) \mathrm{d}x = \sum_{l=0}^{n} A_l \varphi_k(x_l), \quad k = 0,1,\cdots,n. \tag{8.30}$$

因为

$$\varphi_k(x_l) = \begin{cases} 1 & \text{当 } l = k \\ 0 & \text{当 } l \neq k \end{cases},$$

所以(8.30)式的右端等于 A_k，而(8.30)式左端的积分值是大于零的，因此得到

$$A_k > 0, \quad k = 0,1,\cdots,n.$$

(2) 因为 $n \geqslant 1$，所以 Gauss 型求积公式对函数 $f(x)=1$成为等式，即有

$$\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k.$$

证毕.

在科学计算中，各种算法在执行中难免出现舍入误差，当算法含有相当数量的四则运算时，舍入误差可能会积累起来，传播开来，严重影响计算结果的精确性. 但是，在设计算法时如果处理得当，有时可以使舍入误差的积累与传播得到控制. 能够控制误差影响的算法称为**稳定的算法**，否则称为不稳定算法.

下面讨论 Gauss 型求积公式的稳定性.

设在计算过程中 $f(x_k)$有舍入误差 ε_k，即实际参加运算的是 $f(x_k)$的近似值

$$\tilde{f}(x_k) = f(x_k) - \varepsilon_k,$$

则 $\sum\limits_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 的计算结果有误差

$$\delta = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) - \sum_{k=0}^{n} A_k \tilde{f}(x_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k [f(x_k) - \tilde{f}(x_k)].$$

如果求积公式(8.25)是 Gauss 型求积公式，$f(x)$在积分区间上连续，则由定理8.6得到

$$|\delta| \leqslant \sum_{k=0}^{n} A_k |f(x_k) - \tilde{f}(x_k)|$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant n}|f(x_k)-\tilde{f}(x_k)|\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x.$$

由此可见，只需使 $f(x_k)(k=0,1,\cdots,n)$的舍入误差的绝对值都充分小，便可使由此引起的计算结果的误差也充分小．因此，由舍入误差引起的计算结果的误差是可以控制的，即 Gauss 型求积公式是稳定的．

下面的定理给出了 Gauss 型求积公式的收敛性．

定理 8.7　设(8.25)是 Gauss 型求积公式，积分区间为有限区间$[a,b]$，则对任意 $f\in C[a,b]$都有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)=\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x$$

证　由 $f\in C[a,b]$ 及 Weierstrass 定理，对任意 $\varepsilon>0$，存在多项式 $p(x)$使得

$$\|f-p\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}\left(\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x\right)^{-1},$$

从而对一切 $x\in[a,b]$都有

$$|f(x)-p(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\left(\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x\right)^{-1}. \qquad (8.31)$$

设 $p(x)$是 m 次多项式，则当 $n\geqslant\frac{1}{2}(m-1)$时，$m\leqslant 2n+1$，因而有

$$\int_a^b \rho(x)p(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n}A_kp(x_k)=0.$$

而由(8.31)式得

$$\left|\int_a^b \rho(x)[f(x)-p(x)]\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_a^b \rho(x)|f(x)-p(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由定理8.6和(8.31)式又得

$$\left| \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) - \sum_{k=0}^{n} A_k p(x_k) \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} A_k |f(x_k) - p(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此，当 $n \geqslant \frac{1}{2}(m-1)$时

$$\left| \int_a^b \rho(x) f(x) \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \right|$$

$$\leqslant \left| \int_a^b \rho(x) [f(x) - p(x)] \mathrm{d}x \right| + \left| \int_a^b \rho(x) p(x) \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k p(x_k) \right|$$

$$+ \left| \sum_{k=0}^{n} A_k p(x_k) - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \right| < \varepsilon.$$

这就证明了定理的结论.

二、几种 Gauss 型求积公式

1. Gauss-Legendre 求积公式

给定权函数 $\rho(x) \equiv 1$和积分区间$[-1,1]$,Legendre 多项式

$$\mathrm{p}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad n=0,1,\cdots,$$

为相应的正交多项式. 在 Gauss 型求积公式中，取 $\rho(x) \equiv 1$, $[a,b] = [-1,1]$,并取 $\mathrm{p}_{n+1}(x)$的零点作为求积节点，得求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \qquad (8.32)$$

称其为 **Gauss-Legendre 求积公式**. 由(8.28)式知，此时

$$A_k = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{p}_{n+1}(x)}{(x-x_k)\mathrm{p}'_{n+1}(x)} \mathrm{d}x, \quad k = 0,1,,\cdots,n.$$

因为

$$Q(x) = \frac{1}{x-x_k} \mathrm{p}_{n+1}(x) \mathrm{p}'_{n+1}(x)$$

是 x 的$2n$ 次多项式，且

$$Q(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{当 } j \neq k \\ [p'_{n+1}(x_k)]^2 & \text{当 } j = k \end{cases},$$

所以

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} A_j Q(x_j) = A_k [p'_{n+1}(x_k)]^2.$$

另一方面，由分部积分公式得

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{x-x_k}[p_{n+1}(x)]^2 \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left(\frac{p_{n+1}(x)}{x-x_k}\right)' p_{n+1}(x)\mathrm{d}x.$$

根据正交多项式的性质，上式右端的积分等于零. 因此

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{1-x_k} - \frac{1}{-1-x_k} = \frac{2}{1-x_k^2}.$$

于是得到计算求积系数的较为简便的公式

$$A_k = \frac{2}{(1-x_k^2)[p'_{n+1}(x_k)]^2}, \quad k = 0,1,\cdots,n. \qquad (8.33)$$

表8-2给出了部分 Gauss Legendre 求积公式的节点和系数.

表 8-2

n	x_k	A_k	n	x_k	A_k
0	0	2	5	±0.9324695142	0.1713244924
1	±0.5773502692	1		±0.6612093865	0.3607615730
				±0.2386191861	0.4679139346
2	±0.7745966692	0.5555555556	6	±0.9491079123	0.1294849662
	0	0.8888888889		±0.7415311856	0.2797053915
3	±0.8611363116	0.3478548451		±0.4058451514	0.3818300505
	±0.3399810436	0.6521451549		0	0.4179591837
4	±0.9061798459	0.2369268851	7	±0.9602898566	0.1012285363
	±0.5384693101	0.4786286705		±0.7966664774	0.2223810345
	0	0.568888889		±0.5255324099	0.3137066459
				±0.1834346425	0.3626837834

因为 $p_{n+1}(x)$的最高次项的系数

$$a_{n+1}=\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}[(n+1)!]^2},$$

所以由(8.29)式及 Legendre 多项式的性质得 Gauss-Legendre 求积公式的截断误差为

$$R(f)=\frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{[(2n+2)!]^3(2n+3)}f^{(2n+2)}(\eta), \qquad (8.34)$$

其中 $\eta\in(-1,1)$.

对于积分区间不是$[-1,1]$的任何有限区间$[a,b]$可通过变量置换

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$$

化为对变量 t 在$[-1,1]$上的积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

这就可以用 Gauss-Legendre 求积公式计算积分的近似值了.

例 8.5 用 Gauss-Legendre 求积公式计算

$$I=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

解 作变换 $x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$,则

$$I=\int_{-1}^1\frac{\sin\frac{1}{2}(1+t)}{1+t}\mathrm{d}t.$$

用 $n=2$的 Gauss-Legendre 求积公式得

$$I\approx\sum_{k=0}^{2}A_k\frac{\sin\frac{1}{2}(1+x_k)}{1+x_k}$$

$$=0.5555556\frac{\sin\frac{1}{2}(1-0.7745967)}{1-0.7745967}$$

$$+0.8888889\sin\frac{1}{2}$$

$$+0.5555556\frac{\sin\frac{1}{2}(1+0.7745967)}{1+0.7745967}$$

$$=0.9460831.$$

在这里用 Gauss-Legendre 求积公式只取了三个节点，就得出了与例8.3和例8.4具有相同精度的近似值，计算量大大减少. 这是 Gauss 型求积公式具有较高代数精度的必然结果.

2. Gauss-Laguerre 求积公式

当权函数 $\rho(x)=e^{-x}$，积分区间为$[0,+\infty)$时，取区间$[0,+\infty)$上带权 $\rho(x)=e^{-x}$的 $n+1$次正交多项式——Laguerre 多项式

$$L_{n+1}(x)=e^{x}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+1}e^{-x})$$

的零点作为求积节点所形成的 Gauss 型求积公式

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$$

称为 **Gauss-Laguerre 求积公式**.

不难推得其求积系数

$$A_k=\frac{[(n+1)!]^2}{x_k[L'_{n+1}(x_k)]^2},\quad k=0,1,\cdots,n.$$

截断误差

$$R(f)=\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\eta),\quad \eta\in(0,+\infty).$$

表8-3给出了部分 Gauss-Laguerre 求积公式的节点和求积系数.

表 8-3

n	x_k	A_k
0	1	1
1	0.5857864376	0.8535533906
	3.4142135624	0.1464466094
2	0.4157745568	0.7110930099
	2.2942803603	0.2785177335
	6.2899450829	0.0103892565
3	0.3225476896	0.6031541043
	1.7457611012	0.3574186924
	4.5366202969	0.0388879085
	9.3950709123	0.0005392947
4	0.2635603197	0.5217556106
	1.4134030591	0.3986668111
	3.5964257710	0.0759424497
	7.0858100059	0.0036117587
	12.6408008443	0.0000233700

3. Gauss-Hermite 求积公式

取权函数 $\rho(x)=e^{-x^2}$，积分区间为$(-\infty,+\infty)$，Gauss 型求积公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

称为 **Gauss-Hermite 求积公式**，其中求积节点是在区间$(-\infty,+\infty)$上带权 $\rho(x)=e^{-x^2}$的 $n+1$次正交多项式，即 $n+1$次 Hermite 多项式

$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} e^{-x^2}$$

的零点. 可以推得求积系数

$$A_k = \frac{2^{n+2}(n+1)!\sqrt{\pi}}{[H'_{n+1}(x_k)]^2}, \quad k = 0,1,\cdots,n,$$

截断误差

$$R(f)=\frac{(n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\eta), \quad \eta\in(-\infty,+\infty).$$

表8-4给出了部分 Gauss-Hermite 求积公式的求积节点和求积系数.

表 8-4

n	x_k	A_k
0	0	1.7724538509
1	±0.7071067812	0.8862269255
2	±1.2247448714	0.2954089752
	0	1.1816359006
3	±1.6506801239	0.0813128354
	±0.5246476233	0.8049140900
4	±2.0201828705	0.0199532421
	±0.9585724646	0.3936193232
	0	0.9453087205
5	±2.3506049737	0.0045300099
	±1.3358490740	0.1570673203
	±0.4360774119	0.7246295952
6	±2.6519613568	0.0009717812
	±1.6735516288	0.0545155828
	±0.8162878829	0.4256072526
	0	0.8102646176

4. Gauss-Чебышев 求积公式

求积公式

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

称为 **Gauss-Чебышев 求积公式**，其中求积节点是区间$[-1,1]$上带权 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的 $n+1$次正交多项式，即 $n+1$次 Чебышев 多项式

$$T_{n+1}(x)=\cos[(n+1)\arccos x]$$

的零点

$$x_k=\cos\frac{2(n-k)+1}{2n+2}\pi,\quad k=0,1,\cdots,n.$$

可以推得其求积系数

$$A_k=\frac{\pi}{n+1},\quad k=0,1,\cdots,n,$$

截断误差

$$R(f)=\frac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\eta),\quad \eta\in(-1,1).$$

例 8.6 计算积分

$$I=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2+x}{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

的近似值.

解 用 $n=2$的 Gauss-Чебышев 求积公式进行计算. 求积节点为

$$x_0=\cos\frac{5}{6}\pi=-0.866025403,$$

$$x_1=\cos\frac{3}{6}\pi=0.000000000,$$

$$x_2=\cos\frac{1}{6}\pi=0.866025403.$$

求积系数为

$$A_k=\frac{\pi}{3},k=0,1,2.$$

于是

$$I \approx \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{2+x_0}+\sqrt{2+x_1}+\sqrt{2+x_2}\right)$$

$$= 4.368939556 .$$

Gauss 型求积公式使用较少的求积节点就可得到很高精度的结果，这是它的一个明显优点. 它的另一个明显优点是能计算许多广义积分，这是 Newton-Cotes 公式所不及的.

§ 8.5 数值微分

依据函数 $f(x)$ 在一些点的函数值

$$f(x_k) = y_k,\ k = 0,1,\cdots,n, \tag{8.35}$$

求函数 $f(x)$ 导数近似值的问题称为**数值微分**. 下面介绍两种基本的数值微分方法.

一、插值型求导公式

设 $p_n(x)$ 是满足插值条件(8.35)的插值多项式，它可用来逼近 $f(x)$. 因为 $p_n(x)$ 是非常容易求导的，所以用它的导数值来逼近 $f(x)$ 的导数值，即有

$$f^{(m)}(x) \approx p_n^{(m)}(x). \tag{8.36}$$

此式称为**插值型求导公式**.

由 Lagrange 插值多项式的误差公式知，插值型求导公式(8.36)的截断误差为

$$R(x) = f^{(m)}(x) - p_n^{(m)}(x) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)\right], \tag{8.37}$$

其中 ξ 依赖于 x，$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

当 $m=1$ 时有

$$R(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right]\omega(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega'(x). \tag{8.38}$$

由 Lagrange 插值公式与 Newton 插值公式的余项表达式知

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x]$$

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right) \\
&=\lim_{\tilde{x}\to x} \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_n, \tilde{x}] - f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x]}{\tilde{x} - x} \\
&=\lim_{\tilde{x}\to x} f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x, \tilde{x}] \\
&=\lim_{\tilde{x}\to x} \frac{f^{(n+2)}(\bar{\xi})}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi_1).
\end{aligned}$$

其中 ξ_1依赖于 x. 代入(8. 38)式得到

$$R(x) = \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\omega(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega'(x). \qquad (8.39)$$

当 $m=2$时，由(8. 37)可类似地推得

$$R(x) = \frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}\omega(x) + \frac{2f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\omega'(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega''(x). \qquad (8.40)$$

其中 ξ_1, ξ_2依赖于 x.

如果 $n=1$，仅有两个节点 x_0和 x_1. 插值多项式为

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1.$$

记 $h = x_1 - x_0$，则

$$p_1'(x) = \frac{1}{h}(y_1 - y_0).$$

利用(8. 39)式得

$$R(x_k) = (2x_k - x_0 - x_1)\frac{f''(\xi)}{2}, \ k = 0, 1.$$

于是得到 $f(x)$在节点 x_0和 x_1处的一阶导数

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]-\frac{h}{2}f''(\xi),$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]+\frac{h}{2}f''(\xi),$$

以上二式称为**两点数值微分公式**.

如果 $n=2$，且节点为 $x_k=x_0+kh, k=0,1,2$，则插值多项式为

$$p_2(x)=\frac{1}{2h^2}(x-x_1)(x-x_2)y_0-\frac{1}{h^2}(x-x_0)(x-x_2)y_1$$

$$+\frac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)y_2.$$

由此得

$$p_2'(x_k)=\frac{1}{2h^2}(2x_k-x_1-x_2)y_0-\frac{1}{h^2}(2x_k-x_0-x_2)y_1$$

$$+\frac{1}{2h^2}(2x_k-x_0-x_1)y_2,\quad k=0,1,2.$$

利用(8.39)式得

$$R(x_0)=\frac{h^2}{3}f'''(\xi),\quad R(x_1)=-\frac{h^2}{6}f'''(\xi),$$

$$R(x_2)=\frac{h^2}{3}f'''(\xi).$$

于是得到

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi),$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi),$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi).$$

称之为**三点数值微分公式**. 容易求得

$$p_2''(x_k)=\frac{1}{h^2}(y_0-2y_1+y_2),\quad k=0,1,2.$$

利用(8.40)式得

$$R(x_0) = -hf'''(\xi) + \frac{h^2}{6}f^{(4)}(\xi_1),$$

$$R(x_1) = -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_1),$$

$$R(x_2) = hf'''(\xi) - \frac{h^2}{6}f^{(4)}(\xi_1).$$

于是得到二阶导数的三点数值微分公式

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - hf'''(\xi) + \frac{h^2}{6}f^{(4)}(\xi_1),$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_1),$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] + hf'''(\xi) - \frac{h^2}{6}f^{(4)}(\xi_1).$$

二、利用三次样条插值函数求数值导数

由定理7.9知，如果用三次样条插值函数 $S(x)$ 逼近函数 $f(x)$，不仅对函数有较好的逼近效果，而且对导函数也有较好的逼近效果.

设函数 $f(x)$ 在插值区间的各节点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

处函数值为

$$f(x_k) = y_k,\ k = 0,1,\cdots,n.$$

按(7.32)式得三次样条插值函数

$$\begin{aligned} S(x) = &\frac{1}{h_k^3}(x - x_{k+1})^2[h_k + 2(x - x_k)]y_k \\ &+ \frac{1}{h_k^3}(x - x_k)^2[h_k + 2(x_{k+1} - x)]y_{k+1} \\ &+ \frac{1}{h_k^2}(x - x_{k+1})^2(x - x_k)m_k \\ &+ \frac{1}{h_k^2}(x - x_k)^2(x - x_{k+1})m_{k+1}, \end{aligned}$$

$$x \in [x_k, x_{k+1}],\ k = 0,1,\cdots,n-1.$$

其中 m_k 由方程组(7.36)及边界条件确定.对上式两边求导数,并用 $S'(x)$ 近似代替 $f'(x)$ 得

$$\begin{aligned} f'(x) \approx & \frac{6}{h_k^2}(x-x_k)(x_{k+1}-x)f[x_k,x_{k+1}] \\ & + \frac{1}{h_k^2}(x-x_{k+1})(3x-2x_k-x_{k+1})m_k \\ & + \frac{1}{h_k^2}(x-x_k)(3x-x_k-2x_{k+1})m_{k+1}, \\ & x \in [x_k, x_{k+1}],\ k = 0,1,\cdots,n-1. \end{aligned} \tag{8.41}$$

如果只需求节点处的导数,则有

$$f'(x_k) = m_k,\ k = 0,1,\cdots,n.$$

如果对(8.41)式右端再求导数,即得 $f''(x)$ 的近似表达式.

习 题 八

1. 确定下列求积公式中的参数,使其代数精度不小于二次,并求出所得求积公式的代数精度.

   (1) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2)$;

   (2) $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \approx A[f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]$;

   (3) $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \approx Af(-1) + Bf(x_1)$.

2. 用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算下列积分.

   (1) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $n = 5$;

   (2) $\int_0^{1.2} \sqrt{x}\,\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, $n = 6$;

   (3) $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$, $n = 8$.

3. 用 Romberg 算法计算下列积分,要求截断误差不超过 ε.

   (1) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $\varepsilon = 10^{-5}$; (2) $\int_0^{0.8} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$, $\varepsilon = 10^{-7}$.

4. 证明插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

是 Gauss 型求积公式的充分必要条件是对任意次数不超过 n 的多项式 $p(x)$ 都有

$$\int_a^b \rho(x) p(x) \omega(x)\mathrm{d}x = 0,$$

其中 $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

5. 确定下列 Gauss 型求积公式中的待定参数.

(1) $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$;

(2) $\int_0^1 \ln\frac{1}{x} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$.

(提示:利用第4题结论确定求积节点)

6. 用 Gauss-Legendre 求积公式计算下列积分.

(1) $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$, $n = 3$;

(2) $\int_1^3 \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x$, $n = 2$.

7. 用 Gauss-Laguerre 求积公式计算下列积分,取 $n = 3$.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\sin x\mathrm{d}x$.

8. 用 Gauss 型求积公式计算下列积分,取 $n = 2$.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos x\mathrm{d}x$, (2) $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1 - x^2}}\mathrm{d}x$.

9. 给定数表

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	0.2500	0.2268	0.2066	0.1890	0.1736

用三点公式求 $f'(1.0)$,$f'(1.1)$和 $f'(1.4)$的近似值.

10. 给定数表

x	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55
$f(x)$	0.47943	0.38818	0.49688	0.50553	0.51414	0.52269

用三点公式求 $f''(0.50)$,$f''(0.52)$和 $f''(0.55)$的近似值.

第九章　常微分方程的数值解法

在自然科学和工程技术的许多领域，常会遇到常微分方程的定解问题．除少数几种类型常微分方程的解可以用解析表达式给出外，多数情况都只能求助于近似方法．数值解法是一种可以在电子计算机上实现的近似方法．本章§9.1介绍常微分方程初值问题数值解法的基本思想和途径，以及有关的基本概念；§9.2介绍Runge-Kutta 方法；§9.3研究数值方法的收敛性，稳定性与误差控制问题；§9.4讨论一阶微分方程组和高阶微分方程初值问题的数值解法；§9.5介绍常微分方程边值问题的差分解法．

§9.1　概　述

一、常微分方程初值问题

一阶常微分方程初值问题的一般形式为

$$\begin{cases} y' = f(x,y),\ a < x < b \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \tag{9.1}$$

其中 $f(x,y)$ 是区域

$$D\{(x,y)\,|\,x\in[a,b],y\in\mathbb{R}\}$$

上的实值函数．

定义 9.1　如果存在常数 $L>0$，使得对一切 $x\in[a,b]$ 和 $y,z\in\mathbb{R}$，都有

$$|f(x,y)-f(x,z)|\leqslant L|y-z|,$$

则称 $f(x,y)$ 在 D 上关于 y 满足 Lipschitz 条件，其中 L 称为 Lipschitz 常数．

定理 9.1　设 $f(x,y)$ 在 D 上连续且关于 y 满足 Lipschitz 条

件，则对任意 $y_0\in\mathbb{R}$，初值问题(9.1)在$[a,b]$上存在唯一解.

证 不难验证，$y(x)$是初值问题(9.1)的解当且仅当 $y(x)$是积分方程

$$y(x)=y_0+\int_a^x f(x,y(x))\mathrm{d}x$$

的连续解.

设 Lipschitz 常数为 L. 取

$$a_1=\min\{a+\frac{1}{2L},b\}.$$

对任意 $y\in C[a,a_1]$，定义

$$\|y\|=\max_{a\leqslant x\leqslant a_1}|y(x)|,$$

则 $C[a,a_1]$在此范数下成为 Banach 空间. 定义映射 $T:C[a,a_1]\to C[a,a_1]$，对任意 $y\in C[a,a_1]$

$$(Ty)(x)=y_0+\int_a^x f(x,y(x))\mathrm{d}x.$$

于是，对任意 $y,z\in C[a,a_1]$，都有

$$\begin{aligned}&|(Ty)(x)-(Tz)(x)|\\&=\left|\int_a^x[f(x,y(x))-f(x,z(x))]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant L|a_1-a|\max_{a\leqslant x\leqslant a_1}|y(x)-z(x)|\\&\leqslant\frac{1}{2}\|y-z\|.\end{aligned}$$

从而

$$\|Ty-Tz\|\leqslant\frac{1}{2}\|y-z\|.$$

这表明 T 是压缩映射，根据 Banach 压缩映射原理，T 在 $C[a,a_1]$上存在唯一的不动点，即存在唯一的 $y_1\in C[a,a_1]$满足

$$y_1(x)=y_0+\int_a^x f(x,y_1(x))\mathrm{d}x.$$

从而 $y_1(x)$ 是初值问题(9.1)在$[a,a_1]$上的唯一解.

若 $a_1=b$,则定理得证. 否则,取

$$a_2=\min\{a_1+\frac{1}{2L},b\}.$$

按类似方法可证明初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(a_1)=y_1(a_1) \end{cases}$$

在$[a,a_2]$上存在唯一解 $y_2(x)$. 由唯一性可知,在$[a,a_1]$上 $y_2(x)\equiv y_1(x)$. 令 $y(x)=y_2(x)$,则它是初值问题(9.1)在$[a,a_2]$上的唯一解.

若 $a_2=b$,则定理得证. 否则,取

$$a_3=\min\{a_2+\frac{1}{2L},b\}.$$

按同样方法可证明初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(a_2)=y_2(a_2) \end{cases}$$

在$[a_1,a_3]$上存在唯一解 $y_3(x)$,且在$[a_1,a_2]$上 $y_3(x)\equiv y_2(x)$,延拓 $y(x)$ 使其在$[a_2,a_3]$上等于 $y_3(x)$,则它是初值问题(9.1)在$[a,a_3]$上的唯一解.

如此继续推演,最终可将 $y(x)$ 延拓到$[a,b]$上,它是初值问题(9.1)的唯一解. 证毕.

如果(9.1)式中的方程是某种特殊类型的常微分方程,如线性方程,可分离变量方程等,则可通过分析方法求出它的通解,再由初始条件确定其中的任意常数,得到初值问题解的解析表达式. 然而,工程技术中所出现的微分方程往往很难甚至不可能求出它的解析解,只能用近似方法求解. 近似解法主要有两类,一类称为近似解析方法,它能给出解的近似表达式,如级数解法和逐次逼近法. 另一类近似解法就是本章所要介绍的数值解法.

二、建立数值解法的基本思想与途径

给定区间$[a,b]$上一系列节点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b.$$

首先通过一定的方法把连续型问题(9.1)在给定的节点上离散化，得到一个差分方程(一般为代数方程)的初值问题. 再由差分方程求得初值问题(9.1)的解 $y(x)$ 在节点处的近似值. 这就是数值解法的基本思想. 通常用 y_n 表示 $y(x_n)$的近似值，$n=0,1,\cdots,N$. 相邻两个节点之间的距离 $h_n=x_{n+1}-x_n$ 称为步长. 一般地，步长取为常数 h，即取节点为等距节点

$$x_n = x_0 + nh,\ n = 0,1,\cdots,N.$$

基本的离散化方法有三种：数值微分法，数值积分法和 Taylor 展开法.

1. 数值微分法

数值微分法是用数值微分公式代替微分方程中的导数，把方程离散化.

如果用两点数值微分公式

$$y'(x_n)=\frac{1}{h}[y(x_{n+1})-y(x_n)]-\frac{h}{2}y''(\xi_n),\ \xi_n\in(x_n,x_{n+1}),$$

代入(9.1)的方程中得到

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n,y(x_n)) + \frac{1}{2}h^2y''(\xi_n).$$

舍去余项

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}h^2y''(\xi_n),$$

得到

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n,y(x_n)).$$

由初始条件 $y(x_0)=y_0$出发，用此公式可递推求得 $y(x_n)$的近似值 y_n，$n=1,2,\cdots,N$，即用递推公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),\ n = 0,1,\cdots,N-1, \qquad (9.2)$$

可求得 $y(x)$ 在各节点处的近似值.(9.2)式称为求解初值问题(9.1)的 **Euler 格式**. 由 Euler 格式确定的数值解法称为 Euler 方法.

Euler 方法具有明显的几何意义.(9.1)式中微分方程的解在 xy 平面上是一族积分曲线,积分曲线上任一点 (x,y) 的斜率恰好等于 $f(x,y)$ 的值. 通过点 (x_0,y_0) 的积分曲线是初值问题(9.1)的解. Euler 方法的求解过程是:首先在初始点 $P_0(x_0,y_0)$ 引该点的积分曲线的切线,即作斜率为 $f(x_0,y_0)$ 的直线. 当 $x=x_1$ 时,此切线与另一条积分曲线相交,交点的纵坐标即为 y_1.

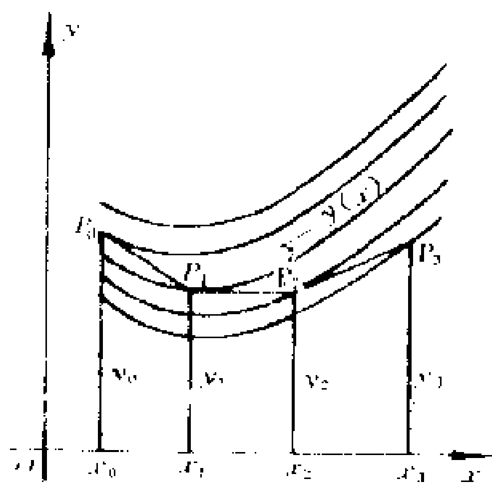


图 9-1

再过点 $P_1(x_1,y_1)$ 作经过该点的积分曲线的切线,当 $x=x_2$ 时它与又一条积分曲线相交,交点的纵坐标即为 y_2. 如此继续作下去,得到一条折线 $P_0P_1\cdots P_N$,见图9-1. 折线上各线段端点的纵坐标 y_0, $y_1,\cdots,y_N$ 就是用 Euler 方法求得的数值解. 因此,Euler 方法又称为 Euler 折线法.

如果用三点数值微分公式

$$y'(x_n) = \frac{1}{2h}[y(x_{n+1}) - y(x_{n-1})] - \frac{1}{6}h^2 y'''(\xi_n),\ \xi_n \in (x_n, x_{n+1})$$

代替方程中的导数,得到

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-1}) + 2hf(x_n, y(x_n)) + \frac{1}{3}h^3 y'''(\xi_n).$$

舍去余项,并用 y_{n-1}, y_n 和 y_{n+1} 分别代替 $y(x_{n-1})$, $y(x_n)$ 和 $y(x_{n+1})$ 得到差分方程

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n). \qquad (9.3)$$

它与 Euler 格式的主要区别在于用此格式计算 y_{n-1} 时不仅需要 y_n 的值，而且还需要 y_{n-1} 的值. 如果一个数值方法在计算 y_{n+1} 时只用到 y_n 的值，则称它是**单步法**；如果在计算 y_{n+1} 时要用到 y_{n+1} 以前数个值，则称它是**多步法**. 由(9. 3)式所确定的数值方法是二步法. 本书只讨论单步法.

2. 数值积分法

将

$$y' = f(x, y)$$

在区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上积分，得到

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\mathrm{d}x. \tag{9.4}$$

对右端的积分用数值积分法计算其近似值，例如用梯形公式得

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n-1}))],$$

代入(9. 4)式，并用 y_n 和 y_{n+1} 分别代替 $y(x_n)$ 和 $y(x_{n+1})$，得到差分方程

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]. \tag{9.5}$$

(9. 5)式称为求解初值问题(9. 1)的**梯形格式**. 这是一个两端都含有 y_{n+1} 的方程. 这样的计算格式称为**隐格式**. 右端不含有 y_{n+1} 的计算格式称为**显格式**. Euler 格式(9. 2)和格式(9. 3)都是显格式. 用隐格式求 y_{n+1} 时，需解代数方程. 当代数方程是非线性方程时，通常采用数值解法.

3. Taylor 展开法

如果初值问题(9. 1)的解 $y(x)$ 和函数 $f(x, y)$ 是充分光滑的，利用 Taylor 公式得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2!}h^2y''(x_n) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{p!}h^py^{(p)}(x_n) + \frac{1}{(p+1)!}h^{p+1}y^{(p+1)}(\xi_n)$$

$$= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{1}{2!}h^2 f'(x_n, y(x_n))$$

$$+ \cdots + \frac{1}{p!}h^p f^{(p-1)}(x_n, y(x_n))$$

$$+ \frac{1}{(p+1)!}h^{p+1} f^{(p)}(\xi_n, y(\xi_n)),$$

其中 $\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$. 略去余项，并用 y_n 和 y_{n+1} 分别代替 $y(x_n)$ 和 $y(x_{n+1})$，得到差分方程

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{1}{2!}h^2 f'(x_n, y_n)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{p!}h^p f^{(p-1)}(x_n, y_n). \tag{9.6}$$

(9.6)式称为求解初值问题(9.1)的 Taylor 格式. 当 $p=1$时，Taylor 格式成为 Euler 格式. 因此，Euler 格式也可用 Taylor 展开法得到.

三、数值方法的截断误差与阶

求解初值问题(9.1)的数值方法其截断误差的分析是比较复杂的. 这里我们仅就显式单步法加以讨论. 显式单步法的一般形式为

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h), \tag{9.7}$$

其中 $\varphi(x,y,h)$ 是其变元的已知连续函数，它依赖于 f 及其偏导数，称为**增量函数**.

定义 9.2 设 $y(x)$是初值问题(9.1)的解，$y_n(n=0,1,\cdots,N)$ 是由计算格式(9.7)求得的数值解，称

$$e_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

为计算格式(9.7)在 x_{n+1} 处的**整体截断误差**，而称

$$\varepsilon_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\varphi(x_n, y(x_n), h) \tag{9.8}$$

为计算格式(9.7)在 x_{n+1} 处的**局部截断误差**.

整体截断误差 e_{n+1} 不仅与第 $n+1$ 步的计算有关，而且还与以

前各步的计算都有关.

由(9.8)式得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\varphi(x_n, y(x_n), h) + \varepsilon_{n+1}. \tag{9.9}$$

与(9.7)式比较可知,当 $y_n = y(x_n)$ 时 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \varepsilon_{n+1}$. 因此,局部截断误差 ε_{n+1} 是在 $e_n = 0$ 或者说第 n 步及以前各步都没有误差的条件下,用(9.7)式近似计算 $y(x_{n+1})$ 时的截断误差.

如何用局部截断误差估计整体截断误差,有以下结论.

定理 9.2 设计算格式(9.7)的增量函数 φ 在区域

$$\Omega = \{(x,y,h) \mid (x,y) \in D, h \in (0,h_0]\}$$

上关于 y 满足 Lipschitz 条件,即存在常数 $L>0$,使不等式

$$|\varphi(x,y,h) - \varphi(x,z,h)| \leqslant L|y - z| \tag{9.10}$$

在 Ω 上成立,此处 $h_0>0$ 为一常数. 如果存在常数 $c \geqslant 0$,使得计算格式(9.7)的局部截断误差

$$|\varepsilon_n| \leqslant ch^{p+1},\ n = 1,2,\cdots,N,$$

则其整体截断误差

$$|e_n| \leqslant |e_0| e^{L(b-a)} + \frac{c}{L} h^p [e^{L(b-a)} - 1],$$

$$n = 1,2,\cdots,N, \tag{9.11}$$

从而当 $e_0 = 0$ 时,$e_n = O(h^p)$.

证 由(9.7),(9.9)和(9.10)式得

$$\begin{aligned}
|e_n| &= |y(x_n) - y_n| \\
&= |y(x_{n-1}) + h\varphi(x_{n-1}, y(x_{n-1}), h) + \varepsilon_n \\
&\quad - y_{n-1} - h\varphi(x_{n-1}, y_{n-1}, h)| \\
&\leqslant |\varepsilon_n| + |y(x_{n-1}) - y_{n-1}| \\
&\quad + h|\varphi(x_{n-1}, y(x_{n-1}), h) - \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}, h)| \\
&\leqslant ch^{p+1} + (1 + hL)|e_{n-1}|.
\end{aligned}$$

继续推演,最终得到

$$|e_n| \leqslant ch^{p+1}\sum_{k=0}^{n-1}(1+hL)^k + (1+hL)^n|e_0|$$

$$\leqslant (1+hL)^n|e_0| + ch^p\frac{(1+hL)^n - 1}{L}.$$

因为 $n \leqslant N \leqslant \frac{b-a}{h}$，所以

$$(1+hL)^n \leqslant (1+hL)^{\frac{b-a}{h}} \leqslant e^{L(b-a)}.$$

从而

$$|e_n| \leqslant |e_0|e^{L(b-a)} + \frac{c}{L}h^p[e^{L(b-a)} - 1].$$

令 $e_0=0$，由上式得 $e_n=O(h^p)$. 证毕.

定理9.2表明，如果增量函数 φ 在区域 Ω 上关于 y 满足 Lipschitz 条件，且初值是准确的，即 $e_0=y(x_0)-y_0=0$，则由

$$\varepsilon_n = O(h^{p+1}), \quad n = 1,2,\cdots,N$$

可以得到

$$e_n = O(h^p), \quad n = 1,2,\cdots,N.$$

一般地，有如下关于数值方法阶的定义.

定义 9.3 如果初值问题(9.1)的数值方法(9.7)的局部截断误差为

$$\varepsilon_n = O(h^{p+1}), \quad n = 1,2,\cdots,N,$$

则称计算格式(9.7)具有 ***p* 阶精度**，或称数值方法(9.7)是 p 阶方法.

当 $y''(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界时，Euler 方法(9.2)的局部截断误差

$$\varepsilon_n = O(h^2), \quad n = 1,2,\cdots,N,$$

因此 Euler 方法是一阶方法.

当 $y^{(p+1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界时，Taylor 方法(9.6)的局部截断误差

$$\varepsilon_n = O(h^{p+1}), \quad n = 1,2,\cdots,N,$$

因此它是 p 阶方法.

§9.2 Runge-Kutta 方法

按照前一节的讨论，Taylor 方法(9.6)具有 p 阶精度. 因此，为了使数值解具有较高的精度，应取较大的 p 值. 但是，由(9.6)式可以看出，当 $p>1$时，每一步的计算不仅需要计算 $f(x_n,y_n)$的值，还要计算 f 在点(x_n,y_n)的直到 $p-1$阶的导数值. 当 f 的结构比较复杂时，这些数值的计算将要加大方法的计算量.

Runge-Kutta 方法是求解初值问题(9.1)的显式单步法. 它把增量函数 φ 看成函数 f 在某些点的线性组合，即取计算格式形如

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h\sum\limits_{i=1}^{r}\omega_i K_i \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_i=f(x_n+\alpha_i h,\ y_n+\sum\limits_{j=1}^{i-1}h\beta_{ij}K_j), \quad i=2,3,\cdots,r \end{cases} \tag{9.12}$$

适当选择其中的参数 ω_i，α_i 和 β_{ij}，使其具有较高的精度. 由于这样的计算格式避免了求导运算，又具有较高精度，因此是较为实用的方法.

一、二阶 Runge-Kutta 方法

当 $r=2$时，(9.12)式即为

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h(\omega_1 K_1+\omega_2 K_2) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\alpha h,y_n+h\beta K_1) \end{cases} \tag{9.13}$$

由 Taylor 公式得

$$K_2=f(x_n,y_n)+h[\alpha f_x(x_n,y_n)+\beta K f_y(x_n,y_n)]+O(h^2).$$

于是，计算格式(9.13)又可写成

$$y_{n+1}=y_n+(\omega_1+\omega_2)hf(x_n,y_n)+\alpha\omega_2 h^2 f_x(x_n,y_n)$$

$$+\beta\omega_2 h^2 f(x_n,y_n)f_y(x_n,y_n)+O(h^3).\quad (9$$

将 $y(x)$ 在 x_n 展开为二阶 Taylor 公式得

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))+\frac{1}{2}h^2[f_x(x_n,y(x_n))$$
$$+f(x_n,y(x_n))f_y(x_n,y(x_n))]+O(h^3).\quad (9$$

比较(9.14)与(9.15)式可以看出，如果选取 ω_1,ω_2,α 和 β 满足

$$\begin{cases}\omega_1+\omega_2=1\\ \alpha\omega_2=\beta\omega_2=\dfrac{1}{2}\end{cases},\quad (9$$

则用 y_{n+1} 近似 $y(x_{n+1})$ 的局部截断误差为 $O(h^3)$，即计算格式 13)具有二阶精度. 此时由(9.13)所确定的数值方法称为 Runge-Kutta 方法.

方程组(9.16)的解不是唯一的. 若取 $\omega_1=\frac{1}{2}$，则 $\omega_2=\frac{1}{2}$，
$=1$. 于是有计算格式

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}(K_1+K_2)\\ K_1=f(x_n,y_n)\\ K_2=f(x_n+h,y_n+hK_1)\end{cases}\quad ($$

(9.17)式称为**改进的 Euler 格式**.

若取 $\omega_1=0$，则 $\omega_2=1,\alpha=\beta=\frac{1}{2}$，得计算格式

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+hK_2\\ K_1=f(x_n,y_n)\\ K_2=f(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_1)\end{cases},\quad (9$$

称之为**中点格式**.

例 9.1　用改进的 Euler 格式解初值问题

$$\begin{cases} y' = y - 2\dfrac{x}{y}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解 改进的 Euler 格式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = y_n - \dfrac{2x_n}{y_n} \\ K_2 = y_n + hK_1 - \dfrac{2(x_n + h)}{y_n + hK_1} \end{cases}$$

步长 $h=0.1$，初值 $y_0=1$，计算结果见下表.

x_n	y_n	$y(x_n)$	x_n	y_n	$y(x_n)$
0.1	1.095909	1.095445	0.6	1.485956	1.483240
0.2	1.184096	1.183216	0.7	1.552515	1.549193
0.3	1.266201	1.264911	0.8	1.615476	1.612452
0.4	1.343360	1.341641	0.9	1.678168	1.673320
0.5	1.416402	1.414214	1.0	1.737869	1.732051

问题的准确解为 $y(x)=\sqrt{1+2x}$. 为了便于比较，表中列出了在各节点处取到七位有效数字的数值.

二、四阶 Runge-Kutta 方法

当 $r=4$时，(9.12)式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\omega_1 K_1 + \omega_2 K_2 + \omega_3 K_3 + \omega_4 K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \alpha_1 h, y_n + h\beta_{21}K_1) \\ K_3 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + h\beta_{31}K_1 + h\beta_{32}K_2) \\ K_4 = f(\alpha_n + \alpha_3 h, y_n + h\beta_{41}K_1 + h\beta_{42}K_2 + h\beta_{43}K_3) \end{cases} \tag{9.19}$$

仿照二阶情形的推导过程，经过复杂的演算可以证明，当(9.19)式中13个参数 ω_i，α_i 和 β_{ij} 满足特定的11个方程式组成的代数方程组时，由(9.19)式所确定的方法是四阶的，称之为**四阶 Runge-Kutta 方法**. 同样地，由于代数方程组的多解性，可以得到一系列四阶 Runge-Kutta 方法. 下面给出两种常用的四阶 Runge-Kutta 格式.

标准 Runge-Kutta 格式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases} \tag{9.20}$$

Gill 格式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}[K_1 + (2-\sqrt{2})K_2 + (2+\sqrt{2})K_3 + K_4] \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}hK_1 + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}hK_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n - \dfrac{\sqrt{2}}{2}hK_2 + \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}hK_3) \end{cases} \tag{9.21}$$

例 9.2　用标准 Runge-Kutta 方法解例9.1 的初值问题

解　计算格式为

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = y_n - \dfrac{2x_n}{y_n} \\
K_2 = y_n + \dfrac{h}{2}K_1 - \dfrac{2x_n + h}{y_n + \dfrac{h}{2}K_1} \\
K_3 = y_n + \dfrac{h}{2}K_2 - \dfrac{2x_n + h}{y_n + \dfrac{h}{2}K_2} \\
K_4 = y_n + hK_3 - \dfrac{2(x_n + h)}{y_n + hK_3}
\end{cases}
$$

取步长 $h=0.1$，初值 $y_0=1$，计算结果见下表.

x_n	y_n	x_n	y_n	x_n	y_n
0.1	1.095446	0.5	1.414216	0.9	1.673325
0.2	1.183217	0.6	1.483243	1.0	1.732056
0.3	1.264913	0.7	1.549197		
0.4	1.341643	0.8	1.612456		

与精确解相比，这里所得结果都已经准确到小数点后第5位. 与例9.1的结果相比，标准 Runge-Kutta 格式求得的数值解比改进的 Euler 格式求得的数值解精确度提高了很多.

§9.3 收敛性、稳定性与误差控制

收敛性和稳定性从不同角度反映了数值方法的可靠性. 只有既收敛又稳定的计算格式才能给出满足精度要求的数值解. 如何使数值结果的误差满足事先给定的精度要求，是数值方法需要研究解决的一个实际问题. 本节将就初值问题(9.1)的数值解法中的

以上问题加以讨论.

一、收敛性

定义 9.4　对于初值问题(9.1)的一个数值方法,如果对任意固定的节点 $x_n=x_0+nh$,当 $h\to 0$时都有 $y_n\to y(x_n)$,则称该方法是**收敛的**.

根据定理9.2,得到判断显式单步法收敛性的结论.

定理 9.3　如果显式单步法(9.7)的增量函数 φ 在区域 Ω 上关于 y 满足 Lipschitz 条件,且其局部截断误差

$$\varepsilon_n = O(h^{p+1}),\ p\geqslant 1,\quad n=1,2,\cdots,N.$$

则该方法是收敛的.

推论　设初值问题(9.1)中函数 $f(x,y)$在 D 上关于 y 满足 Lipschitz 条件,则标准 Runge-Kutta 方法是收敛的.

证　标准 Runge-Kutta 方法是四阶的方法.由定理9.3,为证明此方法收敛,只需证明相应的增量函数在 Ω 上关于 y 满足 Lipschitz 条件.

标准 Runge-Kutta 方法的增量函数为

$$\varphi(x,y,h)=\frac{1}{6}[K_1(x,y,h)+2K_2(x,y,h)+2K_3(x,y,h)+K_4(x,y,h)],$$

其中

$$K_1(x,y,h)=f(x,y),$$

$$K_2(x,y,h)=f(x+\frac{h}{2},y+\frac{h}{2}K_1(x,y,h)),$$

$$K_3(x,y,h)=f(x+\frac{h}{2},y+\frac{h}{2}K_2(x,y,h)),$$

$$K_4(x,y,h)=f(x+h,y+hK_3(x,y,h)).$$

由 $f(x,y)$在 D 上关于 y 满足 Lipschitz 条件可知,存在常数 $L>0$,使得在 Ω 上

$$|K_1(x,y,h) - K_1(x,z,h)| \leqslant L|y-z|,$$

$$|K_2(x,y,h) - K_2(x,z,h)|$$

$$\leqslant L|[y + \frac{h}{2}K_1(x,y,h)] - [z + \frac{h}{2}K_1(x,z,h)]|$$

$$\leqslant L[|y-z| + \frac{h}{2}|K_1(x,y,h) - K_1(x,z,h)|]$$

$$\leqslant L(1 + \frac{1}{2}hL)|y-z|.$$

类似地，得到

$$|K_3(x,y,h) - K_3(x,z,h)|$$

$$\leqslant L[|y-z| + \frac{h}{2}|K_2(x,y,h) - K_2(x,z,h)|]$$

$$\leqslant L(1 + \frac{1}{2}hL + \frac{1}{4}h^2L^2)|y-z|,$$

$$|K_4(x,y,h) - K_4(x,z,h)|$$

$$\leqslant L[|y-z| + h|K_3(x,y,h) - K_3(x,z,h)|]$$

$$\leqslant L(1 + hL + \frac{1}{2}h^2L^2 + \frac{1}{4}h^3L^3)|y-z|.$$

从而，在 Ω 上

$$|\varphi(x,y,h) - \varphi(x,z,h)|$$

$$\leqslant L(1 + \frac{1}{2}hL + \frac{1}{6}h^2L^2 + \frac{1}{24}h^3L^3)|y-z|$$

$$\leqslant L(1 + \frac{1}{2}h_0L + \frac{1}{6}h_0^2L^2 + \frac{1}{24}h_0^3L^3)|y-z|.$$

这表明 $\varphi(x,y,h)$ 在 Ω 上关于 y 满足 Lipschitz 条件. 证毕.

二、稳定性

求初值问题(9.1)的数值解时，很难保证每一步(包括初值)的计算都是精确进行的，常常会产生舍入误差. 而这种舍入误差对以后各步的计算结果都会产生影响. 因此，如果计算格式不能有效地抑制这种误差的传播，将会使得到的数值解失去可靠性. 稳定性问

题就是要研究这种误差的传播能否得到控制.

假设按某种方法求初值问题(9.1)的数值解.用 $\tilde{y}_n$ 和 y_n 分别表示解 $y(x)$ 在节点 x_n 处的实际计算值和(理论上的)数值解,称

$$\delta_n = \tilde{y}_n - y_n$$

为节点 x_n 处数值解的扰动.如果在某个节点 x_n 处数值解的扰动 $\delta_n \neq 0$,即使以后的计算过程都是精确地进行的,由 δ_n 也会引起以后各节点处的数值解产生扰动.如果由每一个节点 x_n 处数值解的扰动 δ_n 引起的下一个节点 x_{n+1} 处数值解的扰动 δ_{n+1} 都满足

$$|\delta_{n+1}| \leqslant |\delta_n|,$$

则由任一节点 x_m 处数值解的扰动 δ_m 引起的以后各节点 x_n 处数值解的扰动 δ_n 都满足

$$|\delta_n| \leqslant |\delta_m|, \quad n = m+1, m+2, \cdots, N,$$

扰动的传播得到控制.因此有如下绝对稳定性概念.

定义 9.5 按某种数值方法求初值问题(9.1)的数值解时,如果由任一节点 x_n 处数值解的扰动 δ_n 引起的下一个节点 x_{n+1} 处数值解的扰动 δ_{n+1} 都满足

$$|\delta_{n+1}| \leqslant |\delta_n|,$$

则称该数值方法是**绝对稳定的**.

数值方法的绝对稳定性,通常用试验方程

$$y' = \lambda y \tag{9.22}$$

来讨论,其中 λ 为常数.选择此方程的理由,一是它比较简单,容易作出判断.另一个理由是,一般初值问题(9.1)的方程可以局部线性化为这种形式.事实上,在点 (x_n, y_n) 的某邻域,

$$f(x,y) = f(x_n, y_n) + (x - x_n)\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_n,y_n)} + (y - y_n)\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_n,y_n)} + \cdots.$$

略去高阶项,并令

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_n,y_n)},$$

代入(9.1)式的方程,得到

$$y' = \lambda y + f(x_n,y_n) + (x - x_n)\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_n,y_n)} - \lambda y_n. \quad (9.23)$$

若 $\lambda \neq 0$,作变换

$$z = y + \frac{1}{\lambda}\left(f(x_n,y_n) + (x - x_n + \frac{1}{\lambda})\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_n,y_n)} - \lambda y_n\right),$$

方程(9.23)化为

$$z' = \lambda z,$$

成为(9.22)的形式.

例 9.3 讨论 Euler 方法的绝对稳定性.

解 对于方程(9.22),Euler 格式为

$$y_{n+1} = (1 + h\lambda)y_n.$$

设 y_n 有扰动 δ_n 变为 $\tilde{y}_n = y_n + \delta_n$,由此引起 y_{n+1} 有扰动 δ_{n+1} 变为 $\tilde{y}_{n+1}$,则

$$\tilde{y}_{n+1} = (1 + h\lambda)\tilde{y}_n.$$

于是

$$\delta_{n+1} = (1 + h\lambda)\delta_n.$$

欲使 $|\delta_{n+1}| \leqslant |\delta_n|$,只需

$$|1 + h\lambda| \leqslant 1.$$

因此,当

$$0 < h \leqslant -\frac{2}{\lambda}$$

时 Euler 方法是绝对稳定的.

例 9.4 研究改进的 Euler 格式的绝对收敛性.

解 由(9.17)式得方程(9.22)的改进 Euler 格式为

$$y_{n+1} = (1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2)y_n.$$

设 y_n 有扰动 δ_n 变为 $\tilde{y}_n = y_n + \delta_n$,由此引起 y_{n+1} 有扰动 δ_{n+1} 变为

$\tilde{y}_{n+1}$,则

$$\tilde{y}_{n+1}=(1+h\lambda+\frac{1}{2}h^2\lambda^2)y_n.$$

于是

$$\delta_{n+1}=(1+h\lambda+\frac{1}{2}h^2\lambda^2)\delta_n.$$

令

$$1+h\lambda+\frac{1}{2}h^2\lambda^2|\leqslant 1\ ,$$

解得

$$0<h\leqslant-\frac{2}{\lambda}\ .$$

故当步长 h 满足 $0<h\leqslant-\frac{2}{\lambda}$ 时改进 Euler 方法是绝对稳定的.

对于标准 Runge-Kutta 方法,可以证明当步长满足

$$0<h\leqslant-\frac{2.78}{\lambda}$$

时方法是绝对稳定的.

三、误差控制

由(9.11)式可知,当 $e_0=0$,即初值是准确值时,p 阶显式单步法(9.7)的整体截断误差为

$$|e_n|\leqslant\frac{ch^p}{L}[e^{L(b-a)}-1]. \tag{9.24}$$

这个结果虽然给出了误差的估计方法,但由于其中的 c 和 L 不易估计,因此是不实用的.下面介绍一种实用的误差控制方法.

设方法(9.7)是 $p(\geqslant 1)$ 阶的,$f(x,y)$ 在 D 上具有 $p+2$ 阶连续偏导数.根据 Graga 定理(参见[17]),在 x_{n+1} 处的数值解 $y_{n+1}^{(h)}$ 与准确解 $y(x_{n+1})$ 之差可表为

$$y_{n+1}^{(h)}-y(x_{n+1})=\beta(x_{n+1})h^p+O(h^{p+1}). \tag{9.25}$$

其中 $\beta(x_{n+1})$ 与 h 无关.将步长折半,即取步长为 $\frac{h}{2}$,则有

$$y_{n+1}^{(h/2)} - y(x_{n+1}) = \beta(x_{n+1})\left(\frac{h}{2}\right)^p + O(h^{p+1}). \quad (9.26)$$

(9.25)与(9.26)两式相减，得到

$$y_{n+1}^{(h)} - y_{n+1}^{(h/2)} = (1 - \frac{1}{2^p})\beta(x_{n+1})h^p + O(h^{p+1}).$$

由此得到

$$\beta(x_{n+1})\left(\frac{h}{2}\right)^p \approx \frac{y_{n+1}^{(h)} - y_{n+1}^{(h/2)}}{2^p - 1}. \quad (9.27)$$

(9.27)式给出了整体截断误差 $y_{n+1}^{(h/2)} - y(x_{n+1})$ 的主要部分 $\beta(x_{n+1})\left(\frac{h}{2}\right)^p$ 的估计方法. 用它可进行事后误差估计. 当给定计算精度要求时，比如要求各节点处的整体截断误差 e_{n+1} 满足

$$|e_{n+1}| < \varepsilon, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1,$$

取一个步长 h 进行计算，减半后再进行计算. 如果

$$\left|\frac{y_{n+1}^{(h)} - y_{n+1}^{(h/2)}}{2^p - 1}\right| < \varepsilon, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1,$$

则可用 $y_{n+1}^{(h/2)}$ 近似 $y(x_{n+1})$. 否则，步长再次减半进行误差估计，直至满足精度要求为止.

§9.4 一阶方程组与高阶方程

一、一阶方程组

一阶常微分方程组初值问题的一般形式为

$$\begin{cases} y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_m) \\ y_i(a) = y_{i0}, \quad i = 1, 2, \cdots, m \end{cases}. \quad (9.28)$$

引进向量记号

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T, \; y_0 = (y_{10}, y_{20}, \cdots, y_{m0})^T,$$
$$F = (f_1, f_2, \cdots, f_m)^T,$$

则初值问题(9.28)可表为

$$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad (9.29)$$

如果在 $m+1$维区域

$$D=\{(x,y)\,|\,x\in[a,b],\ y\in\mathbb{R}^m\}$$

中，$F(x,y)$连续，且关于 y 满足 Lipschitz 条件

$$\|F(x,y)-F(x,z)\|\leqslant L\|y-z\|,$$

其中 $L>0$是常数，则初值问题(9.29)在$[a,b]$上存在唯一解 $y=y(x)$. 这时关于 $m=1$时所建立的各种数值求解格式都可以应用于方程组(9.29)，只需将其中的函数 y 和 f 改写成相应的向量形式即可.

例如，方程组(9.29)的 标准 Runge-Kutta 格式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = F(x_n, y_n) \\ K_2 = F(x_n + \dfrac{h}{2},\ y_n + \dfrac{h}{2}K_1) \\ K_3 = F(x_n + \dfrac{h}{2},\ y_n + \dfrac{h}{2}K_2) \\ K_4 = F(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases} \qquad (9.30)$$

用 $y_{in}, K_{i1}, K_{i2}, K_{i3}$和 K_{i4}分别表示 y_n, K_1, K_2, K_3和 K_4的第 i 个分量，则(9.30)式的分量形式为

$$\begin{cases} y_{i(n+1)}=y_{in}+\dfrac{h}{6}(K_{i1}+2K_{i2}+2K_{i3}+K_{i4}) \\ K_{i1}=f_i(x_n, y_{1n}, y_{2n}, \cdots, y_{mn}) \\ K_{i2}=f_i(x_n+\dfrac{h}{2},\ y_{1n}+\dfrac{h}{2}K_{11}, \cdots, y_{mn}+\dfrac{h}{2}K_{m1}) \\ K_{i3}=f_i(x_n+\dfrac{h}{2},\ y_{1n}+\dfrac{h}{2}K_{12}, \cdots, y_{mn}+\dfrac{h}{2}K_{m2}) \\ K_{i4}=f_i(x_n+h,\ y_{1n}+hK_{13}, \cdots, y_{mn}+hK_{m3}) \end{cases} \qquad (9.31)$$

$$i=1,2,\cdots,m.$$

下面用含有两个方程的方程组具体说明格式(9.31)的计算过程. 设有初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z) \\ z' = g(x,y,z) \end{cases}, \quad \begin{cases} y(a) = y_0 \\ z(a) = z_0 \end{cases}.$$

它的标准 Runge-Kutta 格式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ z_{n+1} = z_n + \dfrac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) \end{cases}, \tag{9.32}$$

其中

$$\begin{cases} K_1 = f(x_n, y_n, z_n) \\ L_1 = g(x_n, y_n, z_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2},\ y_n + \dfrac{h}{2}K_1,\ z_n + \dfrac{h}{2}L_1) \\ L_2 = g(x_n + \dfrac{h}{2},\ y_n + \dfrac{h}{2}K_1,\ z_n + \dfrac{h}{2}L_1) \\ K_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2},\ y_n + \dfrac{h}{2}K_2,\ z_n + \dfrac{h}{2}L_2) \\ L_3 = g(x_n + \dfrac{h}{2},\ y_n + \dfrac{h}{2}K_2,\ z_n + \dfrac{h}{2}L_2) \\ K_4 = f(x_n + h,\ y_n + hK_3,\ z_n + hL_3) \\ L_4 = g(x_n + h,\ y_n + hK_3,\ z_n + hL_3) \end{cases}. \tag{9.33}$$

利用节点 x_n 处的值 y_n 和 z_n，由(9.33)式顺次计算出 $K_1, L_1, K_2, L_2, K_3, L_3, K_4$ 和 L_4，代入(9.32)式即可得出 y_{n+1} 和 z_{n+1} 的值.

二、高阶方程

已解出最高阶导数的 m 阶常微分方程初值问题的一般形式

为

$$\begin{cases} y^{(m)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(m-1)}) \\ y(a) = y_0, y'(a) = y_0^{(1)}, \cdots, y^{(m-1)}(a) = y_0^{(m-1)} \end{cases}$$

引进新变量

$$y_1 = y,\ y_2 = y', \cdots,\ y_m = y^{(m-1)},$$

先将其化为一阶常微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{m-1}' = y_m \\ y_m' = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_m) \\ y_1(a) = y_0, y_2(a) = y_0^{(1)}, \cdots, y_m(a) = y_0^{(m-1)} \end{cases},$$

然后再用数值方法求解.

例如,对于二阶方程的初值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = y_0,\ y' = y_0^{(1)} \end{cases},$$

引进新变量 $z = y'$,则可化为一阶方程组的初值问题

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}, \quad \begin{cases} y(a) = y_0 \\ z(a) = y_0^{(1)} \end{cases}.$$

求此初值问题数值解的改进 Euler 格式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(L_1 + L_2) \\ K_1 = z_n \\ L_1 = f(x_n, y_n, z_n) \\ K_2 = z_n + hL_1 \\ L_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1, z_n + hL_1) \end{cases}$$

§ 9.5 边值问题的差分解法

常微分方程的边值问题亦称为两点边值问题. 二阶常微分方程

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in (a, b) \tag{9.34}$$

的边值问题有三种,它们的边界条件分别为

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta;$$

$$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta;$$

$$y'(a) - \alpha_0 y(a) = \alpha_1, \quad y'(b) + \beta_0 y(b) = \beta_1.$$

其中 $\alpha_0 \geqslant 0, \beta_0 \geqslant 0, \alpha_0 + \beta_0 > 0$. 以上三种边界条件依次称为第一边界条件、第二边界条件和第三边界条件. 相应的边值问题依次称为第一、第二和第三边值问题.

常微分方程边值问题有很多不同的数值解法,如打靶法、差分法、有限元法等. 本节只介绍方程(9.34)边值问题的差分法.

差分解法的基本思想是用差商逼近导数,而使问题离散化,然后再求出解 $y(x)$在各离散点 x_n 上的值 $y(x_n)$的近似值 y_n.

一、线性方程边值问题的差分格式

首先考虑如下的线性方程第一边值问题:

$$\begin{cases} y'' - q(x)y = f(x), & x \in (a, b) \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta \end{cases}, \tag{9.35}$$

其中 α, β 是已知常数,$q(x)$和 $f(x)$都是已知的连续函数,且 $q(x) \geqslant 0$.

假设边值问题(9.35)存在唯一解 $y = y(x)$,把区间$[a, b]$分为 N 等份,其分点为

$$x_n = a + nh, \quad n = 0, 1, \cdots, N.$$

其中步长 $h = \dfrac{b-a}{N}$,节点 $x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}$称为内节点,$x_0$和 x_N 称为

边界节点或界点.

在每个内节点 x_n 处,利用数值微分公式

$$y''(x_n)=\frac{1}{h^2}[y(x_{n+1})-2y(x_n)+y(x_{n-1})]-\frac{1}{12}h^2y^{(4)}(\xi_n),$$

其中 $\xi_n\in(x_{n-1},x_{n+1})$,方程化为

$$\frac{1}{h^2}[y(x_{n+1})-2y(x_n)+y(x_{n-1})]-q(x_n)y(x_n)$$
$$=f(x_n)+\frac{1}{12}h^2y^{(4)}(\xi_n).\tag{9.36}$$

略去右端的第二项,并记 $q_n=q(x_n)$,$f_n=f(x_n)$,得到 $y(x_{n+1})$,$y(x_n)$,$y(x_{n-1})$的近似值 y_{n+1},y_n,y_{n-1}满足的方程

$$\frac{1}{h^2}(y_{n+1}-2y_n+y_{n-1})-q_ny_n=f_n,\quad n=1,2,\cdots,N-1.\tag{9.37}$$

由边界条件,有

$$y_0=\alpha,\quad y_N=\beta.\tag{9.38}$$

(9.37)和(9.38)式是包含 $N+1$个未知数 $y_0,y_1,\cdots,y_N$ 的 $N+1$个方程的线性代数方程组,称为逼近边值问题(9.35)的**差分方程**或**差分格式**.被略去的项

$$R_n=\frac{1}{12}h^2y^{(4)}(\xi_n)$$

称为差分方程的截断误差,差分方程的解 $y_0,y_1,\cdots,y_N$ 称为**差分解**.

差分方程建立之后,需要解决的第一个问题就是它是否存在唯一的解,如何求解.另一个问题是差分解的误差估计与收敛性.为了解决这些问题,先给出两个重要结论.

设 $y_0,y_1,\cdots,y_N$ 是不完全相等的 $N+1$个实数,记

$$l(y_n)=a_ny_{n-1}-b_ny_n+c_ny_{n+1},\tag{9.39}$$
$$n=1,2,\cdots,N-1,$$

其中系数 a_n, b_n, c_n 满足

(1) $a_1=c_{N-1}=0$，$a_n\geqslant 0$，$b_n>0$，$c_n\geqslant 0$，$n=1,2,\cdots,N-1$；

(2) $b_1>c_1$，$b_{N-1}>a_{N-1}$，$b_n\geqslant a_n+c_n$，$n=2,3,\cdots,N-2$.

把(9.39)式写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} l(y_1) \\ l(y_2) \\ \vdots \\ l(y_{N-2}) \\ l(y_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & -b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{N-2} & -b_{N-2} & c_{N-2} \\ & & & a_{N-1} & -b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$$

条件(2)保证了等式右端的系数矩阵是行对角占优的三对角矩阵，且矩阵的第一行和最后一行是严格对角占优的.

引理 9.1(极值原理)　如果

$$l(y_n)\geqslant 0,\quad n=1,2,\cdots,N-1, \tag{9.40}$$

则 $y_0,y_1,\cdots,y_N$ 中正的最大值只能是 y_0或 y_N；如果

$$l(y_n)\leqslant 0,\quad n=1,2,\cdots,N-1,$$

则 $y_0,y_1,\cdots,y_N$ 中负的最小值只能是 y_0或 y_N.

证　反证法. 设(9.40)式成立. 记 $M=\max\limits_{0\leqslant n\leqslant N} y_n$，并设 $M>0$. 若 M 在 y_1达到，则

$$l(y_1)=-b_1y_1+c_1y_2\leqslant(-b_1+c_1)M<0,$$

这与条件(9.40)矛盾. 类似地，可以证明 M 也不能在 y_{N-1}达到. 若 M 不在 y_0,y_1,y_{N-1},y_N 中达到，而在 $y_2,y_3,\cdots,y_{N-2}$中达到，则必存在某个 n_0，$2\leqslant n_0\leqslant N-2$，使得 $y_{n_0}=M$. 而在 y_{n_0-1}与 y_{n_0+1}中至少有一个小于 M. 此时

$$\begin{aligned} l(y_{n_0}) &= a_{n_0}y_{n_0-1}-b_{n_0}y_{n_0}+c_{n_0}y_{n_0+1} \\ &< (a_{n_0}-b_{n_0}+c_{n_0})M\leqslant 0. \end{aligned}$$

这仍与条件(9.40)矛盾. 从而引理的第一个结论成立. 类似地,可以证明引理的第二个结论. 证毕.

推论 设 $l(y_n)$ 由(9.39)式定义,则三对角方程组

$$\begin{cases} l(y_n) = d_n, & n = 1,2,\cdots,N-1 \\ y_0 = \alpha,\ y_N = \beta \end{cases},$$

的解存在且唯一,其中 $\alpha,\beta,d_n(n=1,2,\cdots,N-1)$ 是已知常数.

证 根据线性方程组的理论,只需证明齐次方程组

$$\begin{cases} l(y_n) = 0, & n = 1,2,\cdots,N-1 \\ y_0 = y_N = 0 \end{cases} \tag{9.41}$$

只有零解. 假设方程组(9.41)的解 $y_0,y_1,\cdots,y_N$ 不全为零. 根据极值原理,由

$$l(y_n) = 0, \quad n = 1,2,\cdots,N-1$$

可知,$y_0,y_1,\cdots,y_N$ 中正的最大值与负的最小值只能是 y_0 或 y_N. 这与 $y_0=y_N=0$ 矛盾. 证毕.

引理 9.2(比较定理) 设 $u_0,u_1,\cdots,u_N$ 和 $v_0,v_1,\cdots,v_N$ 满足

$$|l(u_n)| \leqslant -l(v_n), \quad n = 1,2,\cdots,N-1, \tag{9.42}$$

$$|u_0| \leqslant v_0,\ |u_N| \leqslant v_N, \tag{9.43}$$

其中 l 由(9.39)式定义,则

$$|u_n| \leqslant v_n, \quad n = 0,1,\cdots,N.$$

证 由(9.42)和(9.43)式得

$$l(v_n \pm u_n) \leqslant 0, \quad n=1,2,\cdots,N-1,$$

$$v_0 \pm u_0 \geqslant 0, \quad v_N \pm u_N \geqslant 0.$$

于是,根据极值原理得到

$$v_n \pm u_n \geqslant 0, \quad n = 0,1,\cdots,N.$$

此即

$$|u_n| \leqslant v_n, \quad n = 0,1,\cdots,N.$$

证毕.

差分方程(9.37)～(9.38)写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & & & \\ 1 & a_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a_{N-2} & 1 \\ & & & 1 & a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2} \\ d_{N-1} \end{bmatrix},$$

其中

$$a_i = -(2+q_i h^2),\ i=1,2,\cdots,N-1,$$

$$d_1 = h^2 f_1 - \alpha,\ d_{N-1} = h^2 f_{N-1} - \beta.$$

根据引理9.1的推论可得如下结论.

定理 9.4　差分方程(9.37)～(9.38)的解存在且唯一.

差分方程(9.37)～(9.38)是三对角方程组,可以用追赶法求解.

定理 9.5　设 $y_0, y_1, \cdots, y_N$ 是差分方程(9.37)～(9.38)的解. $\varepsilon_n = y(x_n) - y_n, n=0,1,\cdots,N$,则有估计式

$$|\varepsilon_n| \leqslant \frac{M}{96} h^2 (b-a)^2, \quad n = 0,1,\cdots,N, \qquad (9.44)$$

其中 $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |y^{(4)}(x)|$.

证　考虑边值问题

$$\begin{cases} v'' = -\dfrac{M}{12} h^2, & x \in (a,b) \\ v(a) = v(b) = 0 \end{cases}, \qquad (9.45)$$

容易求得它的解为

$$v(x) = \frac{M}{24} h^2 (x-a)(b-x),$$

其最大值为

$$v\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{M}{96} h^2 (b-a)^2.$$

边值问题(9.45)的差分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{h^2}[v_{n+1}-2v_n+v_{n-1}]=-\dfrac{M}{12}h^2\\ v_0=v_N=0,\quad n=1,2,\cdots,N-1\end{cases}. \tag{9.46}$$

不难求得差分解

$$v_n=v(x_n)=\frac{M}{24}h^2(x_n-a)(b-x_n),\quad n=0,1,\cdots,N.$$

因此

$$0\leqslant v_n\leqslant\frac{M}{96}h^2(b-a)^2. \tag{9.47}$$

另一方面,(9.36)式与(9.37)式相减,得到

$$\begin{cases}l(\varepsilon_n)=\dfrac{1}{h^2}(\varepsilon_{n+1}-2\varepsilon_n+\varepsilon_{n-1})-q_n\varepsilon_n=\dfrac{1}{12}h^2y^{(4)}(\xi_n)\\ \varepsilon_0=\varepsilon_n=0,\quad n=1,2,\cdots,N-1\end{cases}.$$

与(9.46)式比较,由 $q_n\geqslant0$和 $v_n\geqslant0$得

$$|l(\varepsilon_n)|=\frac{1}{12}h^2|y^{(4)}(\xi_n)|$$

$$\leqslant\frac{M}{12}h^2+q_nv_n=-l(v_n),$$

$$|\varepsilon_0|=v_0,|\varepsilon_N|=v_N,\quad n=1,2,\cdots,N-1.$$

于是利用比较定理得到

$$|\varepsilon_n|\leqslant v_n,\quad n=0,1,\cdots,N.$$

再利用(9.47)式得到

$$|\varepsilon_n|\leqslant\frac{M}{96}h^2(b-a)^2.$$

证毕.

由估计式(9.44)可以看出,当 $h\to0$时,

$$\varepsilon_n = y(x_n) - y_n \to 0, \quad n = 0,1,\cdots,N.$$

即当步长 $h\to 0$时，差分方程(9.37)～(9.38)的解收敛于边值问题(9.35)的解. 又由于 $\varepsilon_n \doteq O(h^2), n=0,1,\cdots,N$，所以称收敛是2阶的，或称逼近误差为 $O(h^2)$.

考虑一般二阶线性常微分方程的第一边值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' - q(x)y = f(x), & x \in (a,b) \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}, \tag{9.48}$$

其中 $p(x), q(x)$和 $f(x)$都是已知的连续函数，且 $q(x) \geqslant 0$. 与前面类似，把区间$[a,b]$分为 N 等份，节点为

$$x_n = a + nh, \quad n = 0,1,\cdots N,$$

步长 $h = \dfrac{b-a}{N}$. 在每个内节点 x_n 处，由数值微分公式有

$$y''(x_n) = \frac{1}{h^2}[y(x_{n+1}) - 2y(x_n) + y(x_{n-1})] - \frac{1}{12}h^2 y^{(4)}(\xi_n),$$

$$y'(x_n) = \frac{1}{2h}[y(x_{n+1}) - y(x_{n-1})] - \frac{1}{6}h^2 y'''(\eta_n),$$

其中 $\xi_n, \eta_n \in (x_{n-1}, x_{n+1})$. 代入方程(9.48)，并略去 h 的高阶项，得差分方程

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + \dfrac{1}{2h}p_n(y_{n+1} - y_{n-1}) - q_n y_n = f_n \\ y_0 = \alpha,\ y_N = \beta, \quad n = 1,2,\cdots,N-1 \end{cases}, \tag{9.49}$$

式中 $p_n = p(x_n), q_n = q(x_n), f_n = f(x_n)$，$y_n$ 为 $y(x_n)$的近似值. 将(9.49)式化简整理后得

$$\begin{cases} (1 - \dfrac{h}{2}p_n)y_{n-1} - (2 + h^2 q_n)y_n + (1 + \dfrac{h}{2}p_n)y_{n+1} = h^2 f_n \\ y_0 = \alpha,\ y_N = \beta, \quad n = 1,2,\cdots,N-1 \end{cases}.$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{N-2} & a_{N-2} & c_{N-2} \\ & & & b_{N-1} & a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2} \\ d_{N-1} \end{bmatrix}. \qquad (9.50)$$

其中

$$a_i = -2 - h^2 q_i,\ i = 1,2,\cdots,N-1,$$

$$b_i = 1 - \frac{h}{2} p_i,\ i = 2,3,\cdots,N-1,$$

$$c_i = 1 + \frac{h}{2} p_i,\ i = 1,2,\cdots,N-2,$$

$$d_1 = h^2 f_1 - (1 - \frac{h}{2} p_1)\alpha,$$

$$d_{N-1} = h^2 f_{N-1} - (1 + \frac{h}{2} p_{N-1})\beta.$$

假设 $L = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x)|$，利用极值原理容易证明，当 $h < \frac{2}{L}$ 时差分方程(9.50)存在唯一解.

例 9.5　用差分方法解边值问题

$$\begin{cases} y'' - y = x, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0, & y(1) = 1 \end{cases}$$

解　取步长 $h = 0.1$，则节点

$$x_n = 0.1n, \quad n = 0,1,\cdots,10.$$

建立差分方程

$$\begin{cases} \frac{1}{0.01}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) - y_n = 0.1n, & n = 1,2,\cdots,9 \\ y_0 = 0, \quad y_{10} = 1 \end{cases},$$

整理得

$$\begin{bmatrix} -2.01 & 1 & & & \\ 1 & -2.01 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2.01 & 1 \\ & & & 1 & -2.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.002 \\ \vdots \\ 0.008 \\ -0.991 \end{bmatrix}.$$

用追赶法解此三对角方程组，得边值问题在内节点处数值解见下表.

x_n	y_n	x_n	y_n	x_n	y_n
0.1	0.0704982	0.4	0.2991452	0.7	0.5911353
0.2	0.1427014	0.5	0.3869501	0.8	0.7115574
0.3	0.2183317	0.6	0.4836246	0.9	0.8470435

二、其它边界条件的讨论

考虑二阶线性常微分方程的第三边值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' - q(x)y = f(x), & x \in (a,b) \\ y'(a) - \alpha_0 y(a) = \alpha_1, & y'(b) + \beta_0 y(b) = \beta_1 \end{cases}, \tag{9.51}$$

其中 $p(x)$，$q(x)$和 $f(x)$都是已知的连续函数，且 $q(x)\geqslant 0$. 按照前面的方法把方程离散化得

$$\frac{1}{h^2}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + \frac{1}{2h}p_n(y_{n+1} - y_n) - q_n y_n = f_n,$$

$$n = 1,2,\cdots,N-1. \tag{9.52}$$

这些差分方程的截断误差为 $O(h^2)$. 现在的边界条件含有导数，也需利用数值微分公式离散化为差分方程. 为了得到与(9.52)式具有同样阶数截断误差的差分方程，需采用三点数值微分公式

$$y'(a) = y'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)] + O(h^2),$$

$$y'(b)=y'(x_N)=\frac{1}{2h}[y(x_{N-2})-4y(x_{N-1})+3y(x_N)]+O(h^2).$$

代入边界条件得差分方程

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2h}(-3y_0+4y_1-y_2)-\alpha_0y_0=\alpha_1\\&\frac{1}{2h}(y_{N-2}-4y_{N-1}+3y_N)+\beta_0y_N=\beta_1\end{aligned}, \tag{9.53}$$

于是,求节点 x_n 处函数值 $y(x_n)$ 的近似值 $y_n(n=0,1,\cdots,N)$,归结为解差分方程组(9.52)~(9.53).

对于第二边值问题,其边界条件的处理方法与第三类边界条件相同.

三、非线性方程边值问题

对于非线性常微分方程的边值问题

$$\begin{cases}y''=f(x,y,y'), & x\in(a,b)\\y(a)=\alpha, & y(b)=\beta\end{cases}, \tag{9.54}$$

其相应的差分格式为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{h^2}(y_{n+1}-2y_n+y_{n-1})=f\left(x_n,y_n,\dfrac{1}{2h}(y_{n+1}-y_{n-1})\right)\\y_0=\alpha,y_N=\beta,\ n=1,2,\cdots,N-1\end{cases},$$

这是一个非线性方程组,可用 Newton 法或其它解非线性方程组的方法求解.

习　题　九

1. 用 Euler 方法解下列初值问题:

(1) $\begin{cases}y'=x^2+y^2, & x\in(0,1)\\y(0)=0\end{cases}$,

取步长 $h=0.1$;

(2) $\begin{cases}y'=\dfrac{1}{x}(y^2+y), & x\in(1,3)\\y(1)=-2\end{cases}$,

取步长 $h=0.5$.

2. 用改进 Euler 方法解下列初值问题：

(1) $\begin{cases} y' = x^2 + y^2, & x \in (0,1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$,

取步长 $h=0.1$;

(2) $\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y}, & x \in (0,1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$,

取步长 $h=0.1$.

3. 用标准 Runge-Kutta 方法解下列初值问题：

(1) $\begin{cases} y' = \dfrac{3y}{1+x}, & x \in (0,1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$,

取步长 $h=0.2$;

(2) $\begin{cases} y' = -2y + 2x^2 + 2x, & x \in (0,0.5) \\ y(0) = 1 \end{cases}$,

取步长 $h=0.1$.

4. 设 $f(x,y)$在 $D=\{(x,y)\,|\,x\in[a,b],y\in\mathbb{R}\}$上关于 y 满足 Lipschitz 条件，证明求初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & x \in (a,b) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

数值解的改进 Euler 格式收敛.

5. 讨论解初值问题

$$\begin{cases} y' = -10y, & x \in (a,b) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

的二阶 Runge-Kutta 方法的绝对稳定性对步长的限制.

6. 写出用标准 Runge-Kutta 方法解初值问题

$$\begin{cases} y' = -8y + 7z \\ z' = x^2 + yz, & x \in (0,1) \\ y(0) = 1, z(0) = 0 \end{cases}$$

的计算格式.

7. 写出用 Euler 方法及改进 Euler 方法解初值问题

$$\begin{cases} y'' + \sin y = 0, & x \in (0,1) \\ y(0) = 1, & y'(0) = 0 \end{cases}$$

的计算格式.

8. 用差分方法解边值问题

$$\begin{cases} y'' - (1 + x^2)y = 1, & x \in (0,1) \\ y(0) = 1, & y(1) = 3 \end{cases},$$

取步长 $h = 0.1$.

9. 写出用差分方法解下列边值问题的差分方程组. 取步长 $h = 0.2$，要求截断误差为 $O(h^2)$.

(1) $\begin{cases} y'' - 4x^2 y = 1 + 2x, & x \in (0,2) \\ y'(0) = 1, & y(2) = 2 \end{cases}$；

(2) $\begin{cases} (1 + x^2)y'' - xy' - 3y = 6x - 3, & x \in (0,1) \\ y(0) - y'(0) = 1, & y(1) = 2 \end{cases}$.

第十章　数理方程基本概念

数学物理方程是指描述各种自然现象或物理过程(比如弦振动问题、热传导过程、扩散现象等)的偏微分方程，在实际中经常碰到的是二阶线性偏微分方程. 本书的最后三章将介绍几种典型的二阶线性偏微分方程在不同条件下的求解方法，为此，先叙述数理方程的一些基本问题：偏微分方程的有关概念；二阶线性偏微分方程的分类；典型方程所描述的物理现象；定解条件与定解问题的提法.

§10.1　二阶线性偏微分方程的分类

一、偏微分方程的基本概念

含有未知函数的偏导数的方程叫做**偏微分方程**. 例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 , \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = f(x,y) , \tag{2}$$

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = y , \tag{3}$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial z} + xyv^2 = g(z,y,z) , \tag{4}$$

(其中 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y,z)$是未知函数；x,y,z 是自变量；$f(x,y)$，$g(x,y,z)$是已知函数)等都是偏微分方程.

偏微分方程中所出现的未知函数偏导数的最高阶数称为该偏微分方程的**阶**. 前述偏微分方程(1)和(3)是二阶的，偏微分方程(2)是一阶的，而(4)是三阶偏微分方程.

如果一个偏微分方程对所含未知函数及各阶偏导数都是线性的，则称其为**线性偏微分方程**；如果对未知函数的所有最高阶偏导数来说都是线性的，则称其为**拟线性偏微分方程**. 例如方程(1)是线性的，方程(3)和(4)是拟线性的. 方程(2)既不是线性的，也不是拟线性的. 不是线性的偏微分方程，就称为非线性偏微分方程.

为书写简单起见，通常将 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}$ 等分别写为 $u_x, u_{xy}, v_{yyx}, \cdots$，例如方程(3)可简写为

$$uu_{yx} + u_x = y,$$

而一般的 n 个自变量的二阶偏微分方程则可写为

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \cdots, u_{x_nx_n}) = 0.$$

如果函数 u 具有某偏微分方程中所需的各阶连续偏导数且能使方程变成关于自变量的恒等式，则称函数 u 是该偏微分方程的**解**. 同常微分方程类似，一个偏微分方程如果有解，则就有无穷多个解，这是因为偏微分方程的解中含有若干个任意函数. 例如，对于任意可微函数 $\alpha(\xi)$ 和 $\beta(\eta)$，容易验证 $u = \alpha(x) + \beta(y)$ 都是二阶偏微分方程 $u_{xy} = 0$ 的解；而 $v = \alpha(x+y) + \beta(x-y)$ 都是方程 $v_{xx} - v_{yy} = 0$ 的解. 对于偏微分方程，主要是研究其在某些附加条件下的解.

二、二阶线性偏微分方程的分类

二阶线性偏微分方程的一般形式是

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f, \qquad (10.1)$$

其中 a_{ij}, b_i, c, f 都是自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的已知实函数($i, j = 1, 2, \cdots, n$). 一个线性偏微分方程中，不含 u 及其偏导数的项 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为**自由项**. 当自由项 $f = 0$时，就称这线性方程是**齐次的**，否则就是非齐次的.

为便于研究二阶线性偏微分方程，我们依照一定的原则将其

分成若干种类型.方程(10.1)中含二阶偏导数的部分 $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}$ 称为**主要部分**,记为 Lu.当假定 u 在某区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 内有连续的二阶偏导数且 $a_{ij}=a_{ji}$,a_{ij}为 Ω 上的连续函数时,若记

$$L=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j},$$

则 L 是从 $C^2(\Omega)$到 $C(\Omega)$的线性算子.L 对应的矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$在 Ω 的每一点处都是一个实对称矩阵.根据 A 的不同情况,将方程(10.1)分成各种类型.在下面的讨论中,总假设 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

定义 10.1 在点 $x^0\in\Omega$ 处,若 A 的 n 个特征值都是正的或都是负的(即 A 是正定的或负定的),则称方程(10.1)在 x^0点是**椭圆型的**;

若 A 的特征值中至少有一个为零(即 A 是奇异的),则称方程(10.1)在 x^0点是(广义)**抛物型的**;

若 A 的特征值中有 m 个同号而其余 $n-m$ 个$(1\leqslant m<n)$具有相反的符号,则称方程(10.1)在 x^0点是**双曲型的**.当 $m=1$时,是狭义双曲型的,简称为双曲型,当 $m>1$且 $n-m>1$时,是超双曲型的.

当方程(10.1)在 Ω 的每一点处都是椭圆型(抛物型或双曲型)的,则称它在 Ω 内是椭圆型(抛物型或双曲型)的.若方程(10.1)在区域 Ω 的不同部分属于不同的类型,则称它在 Ω 内是混合型的.

例 10.1 判断 Tricomi 方程

$$y\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0\qquad(\text{其中 } u=u(x,y))$$

所属类型.

解 因为 $A=\mathrm{diag}(y,1)$的两个特征值为 y 和1,故有如下结

论.

当 $y>0$时,即在上半平面内,它是椭圆型的;

当 $y=0$时,即在 Ox 轴上,它是抛物型的;

当 $y<0$时,即在下半平面内,它是双曲型的.

于是它在任何跨越 Ox 轴的区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$内属于混合型方程.

若方程(10.1)中的系数 $a_{ij},b_i(i,j=1,2,\cdots,n)$及 c 都是常数,则称其为常系数二阶线性偏微分方程.此时,它在区域 Ω 内只能属于某一种类型.

例 10.2 判断下列常系数二阶线性偏微分方程所属类型:

(1) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f(x,y,z)$,其中 $u=u(x,y,z)$;

(2) $u_t-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=g(x,y,z,t)$,其中 $u=u(x,y,z,t)$,$a>0$;

(3) $u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=\varphi(x,y,t)$,其中 $u=u(x,y,t)$,$a>0$;

(4) $u_{tt}+2u_{xx}-u_{yy}-5u_{zz}=1$,其中 $u=u(x,y,z,t)$.

解 (1) 因为 $A=\mathrm{diag}(1,1,1)$的三个特征值均为正,故方程是椭圆型方程.

(2) $A=\mathrm{diag}(0,-a^2,-a^2,-a^2)$有一个特征值为零,故方程属于抛物型.

(3) $A=\mathrm{diag}(1,-a^2,-a^2)$有一个特征值为正,其余两个为负,故方程属于狭义双曲型.

(4) $A=\mathrm{diag}(1,2,-1,-5)$的特征值为两正两负,故方程是超双曲型的.

对于两个自变量的二阶线性方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f(x,y) \tag{10.2}$$

(其中 $a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2,c,f$ 是 x,y 的已知函数)来说,只有三种类型,而且也容易判定.因为此时

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \ \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2,$$

故方程(10.2)依 detA 大于零、等于零和小于零而分别属于椭圆型、抛物型和双曲型.

三、二阶线性偏微分方程的标准形式

为找出各类型二阶线性偏微分方程的标准形式,作变量替换

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

并设 $\xi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 x^0 点有连续的二阶偏导数且 Jacobi 行列式 $J = \dfrac{D(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \neq 0$.

因为

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i},$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} u_{\xi_k \xi_l} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

故方程(10.1)化为

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu = f.$$

此方程仍旧是线性的,其中

$$\bar{b}_k = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

值得注意的是,主要部分的系数在变换

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \cdots x_n), \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

下的变换公式(*)恰好与二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j$ 的系数在满秩线性变换

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \zeta_k$$

下的变换公式相同.

我们知道,任何二次型 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j$ 都可经过一个适当的满秩线性变换化为规范形 $\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \zeta_i^2$,其中 r 是二次型(亦即矩阵 A)的秩,$\varepsilon_i = 1$ 或 -1 且由惯性定理知,1 和 -1 的个数是一定的,由此可知,在 $x^0 \in \Omega$ 点必存在可逆变换

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

将方程(10.1)化为下面的标准形式

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i u_{\xi_i\xi_i} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i u_{\xi_i} + cu = f.$$

因此各类二阶线性偏微分方程在 x^0 点的标准形式为:

(椭圆型) $\sum_{i=1}^{n} u_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f.$

(抛物型) $\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_ix_i}) + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f,\ (m > 0).$

(双曲型) $u_{x_1x_1} - \sum_{i=2}^{n} u_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f.$

(超双曲型) $\sum_{i=1}^{m} u_{x_ix_i} - \sum_{i=m+1}^{n} u_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f.$

注 (1)当(10.1)在区域 Ω 内是常系数线性方程时,可以用同一个常系数的线性变换将其化为标准形式.

(2)当(10.1)在 Ω 内为变系数方程时,只能逐点将其化为标准形式,因为在 Ω 的不同部分,其所属类型可能不同.

(3)即使在 Ω 内方程(10.1)的类型固定,除 $n=2$ 外,一般也不能用同一个变换把它在 Ω 内各点处化为标准形式. 因为主要部分

的系数矩阵 A 的非主对角元素有$\frac{n(n-1)}{2}$个，要使之全为零，就必须满足$\frac{n(n-1)}{2}$个条件，而可供选择的变换函数 $\xi_k=\xi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)(k=1,2,\cdots,n)$却只有 n 个. 当 $n>3$时，总有 $n<\frac{n(n-1)}{2}$，所以一般说来，不可能选取一个变换使非主对角元全为零. 当 $n=3$时，虽然 $n=\frac{n(n-1)}{2}$，可以选取一个变换使所有非主对角元都为零，但主对角元还可能是彼此不同的. 然而当 $n=2$时，即对于方程(10.2)，却可以选取一个变换使之在 Ω 内化为标准形式.

四、两个自变量时化为标准形式的变换

两个自变量的二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f$$

(其中 $a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2,c,f$ 仅为 x,y 的函数)　　(10.2)

当 $\triangle=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$ 时属双曲型，其标准形式是

$$u_{ss}-u_{tt}=\bar{b}_1u_s+\bar{b}_2u_t+\bar{c}u+\bar{f}$$

或　$$u_{\xi\eta}=B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F;$$

当 $\triangle=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$ 时属抛物型，其标准形式是

$$u_{\eta\eta}=B_1u_\xi+B_2u_\eta+cu+F;$$

当 $\triangle=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$ 时属椭圆型，其标准形式是

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F.$$

下面求将方程(10.2)化为标准形式的变换. 作自变量变换

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases},$$

为满足方程(10.2)并保证变换是可逆的，故要求 $\xi(x,y),\eta(x,y)$ 在 Ω 内二阶连续可导且 Jacobi 行列式

$$J=\det\begin{bmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{bmatrix}\neq 0.$$

于是此变换就将方程(10.2)化为以 ξ,η 为自变量的方程

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}=B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F. \tag{10.2'}$$

记 $G(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F$，将它写为

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}=G,$$

其中

$$\begin{cases}A_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2\\A_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y\\A_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2\end{cases}.$$

若将其与各个标准形式比较，则分别得到

$$(1)\begin{cases}A_{11}=A_{22}=0\\A_{12}\neq 0\end{cases},\quad (2)\begin{cases}A_{11}=0\\A_{12}=0,\\A_{22}\neq 0\end{cases}\quad (3)\begin{cases}A_{11}=A_{22}\neq 0\\A_{12}=0\end{cases}.$$

由上可知，为得到方程(10.2)的标准形式，就需要求解

$$a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

这是一阶非线性偏微分方程，直接求解很困难．但求它的一个特解，等价于求一个常微分方程的通解．事实上，若 $z=\varphi(x,y)$ 是方程(＊＊)的一个特解，则有

$$a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0.$$

当 $\varphi_y\neq 0$ 时，有

$$a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=0.$$

令 $y=y(x,c)$ 是由 $\varphi(x,y)=c$ 确定的隐函数，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\left.\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right|_{y=y(x,c)},$$

于是可得

$$a_{11}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}$$

$$=\left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\right]_{y=y(x,c)}=0,$$

即 $\varphi(x,y)=c$ 是常微分方程

$$a_{11}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=0 \tag{10.3}$$

的通解.

反之,若 $\varphi(x,y)=c$ 是常微分方程(10.3)的一个通解,过任意一点(x_0,y_0)作方程(10.3)的积分曲线 $\varphi(x,y)=\varphi(x_0,y_0)=c_0$,沿该曲线有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y},$$

代入方程(10.3),于是沿曲线 $\varphi(x,y)=c_0$,特别在(x_0,y_0)点有

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=0.$$

因为(x_0,y_0)是任取的,故 $z=\varphi(x,y)$满足偏微分方程(* *).

由于方程(10.2)的类型及标准形式只依赖于它的主要部分,而主要部分又是由系数 a_{11},a_{12},a_{22}完全确定的,故由这些系数构造的常微分方程(10.3)与偏微分方程(10.2)的主要部分是一一对应的.因此,称方程(10.3)是方程(10.2)的**特征方程**.特征方程的积分曲线(通解的图形)叫做方程(10.2)的**特征曲线(族)**.特征方程(10.3)可分成两个方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{10.3(1)}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{10.3(2)}$$

当$\triangle=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$时,方程(10.3(1))和(10.3(2))都有实解.设它们的通解为 $\varphi(x,y)=c$ 和 $\psi(x,y)=c$.此时方程(10.2)有两族实特征线.

取变换 $\xi=\varphi(x,y)$,$\eta=\psi(x,y)$.由以上分析可知,此时 $A_{11}=$

$0, A_{22}=0$，且易验证 $A_{12}\neq 0$. 于是以 $2A_{12}$ 除以方程(10.2′)的两边就得到双曲型方程的标准形式

$$u_{\xi\eta}=G^*(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),\ (G^*=G/2A_{12}).$$

若再作一个变换 $s=\dfrac{\xi+\eta}{2}, t=\dfrac{\xi-\eta}{2}$，就可得双曲型方程的第二种标准形式

$$u_{ss}-u_{tt}=G_1(s,t,u,u_s,u_t).$$

当 $\triangle=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$ 时，方程(10.3(1))和(10.3(2))实际上是一个方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$，故方程(10.2)只有一族实特征线 $\varphi(x,y)=c$.

设 $\psi(x,y)$ 是满足 $J=\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}\neq 0$ 的任意二阶可微函数，取变换 $\xi=\varphi(x,y), \eta=\psi(x,y)$，则有 $A_{11}=0$. 由于 $a_{12}=\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$，$A_{11}=\left(\sqrt{a_{11}}\xi_x+\sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2=0$ 得

$$A_{12}=(\sqrt{a_{11}}\xi_x+\sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x+\sqrt{a_{22}}\eta_y)=0.$$

又因为 $\eta=\psi(x,y)$ 可以是任意函数，故总可使 $A_{22}\neq 0$（比如取 $\eta=y$）. 以 A_{22} 除以方程(10.2′)便得到抛物型方程的标准形式

$$u_{\eta\eta}=G^*(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),\ (G^*=G/A_{22}).$$

当 $\triangle=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$ 时，由于特征方程(10.3)的通解为实变量的复值函数，设为

$$\Phi(x,y)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=c,$$

故方程(10.2)无实特征线，不能象前两种情况那样选取 ξ 和 η. 但由于 $\Phi(x,y)=c$ 是方程(10.3)的解，将其代入方程(10.3)并分出实部和虚部可得

$$a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=a_{11}\psi_x^2+2a_{12}\psi_x\psi_y+a_{22}\psi_y^2$$

和 $$a_{11}\varphi_x\psi_x+a_{12}(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)+a_{22}\varphi_y\psi_y=0,$$

故只要取变换

$$\begin{cases}\xi = \varphi(x,y) = \mathrm{Re}\Phi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) = \mathrm{Im}\Phi(x,y)\end{cases},$$

就有

$$A_{11} = A_{22} \text{ 且 } A_{12} = 0,$$

从而得到椭圆型方程的标准形式

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = G^*(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),\ (G^* = G/A_{11}).$$

例 10.3 将 Tricomi 方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

化为标准形式.

解 这里 $a_{11}=y$，$a_{12}=0$，$a_{22}=1$，$\triangle=-y$. 其特征方程为

$$y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 1 = 0.$$

当 $y<0$时为双曲型. 此时特征方程成为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{-y}} \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\sqrt{-y}},$$

故有两族实特征线

$$x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=c_1 \text{和} \ x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=c_2.$$

作变换 $\xi=x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$，$\eta=x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$可将方程化为标准形式

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi - u_\eta),\ (\xi\neq\eta).$$

当 $y=0$时，方程为 $u_{yy}=0$，这就是抛物型方程的标准形式.

当 $y>0$时方程为椭圆型，特征方程有复解 $x\pm i\frac{2}{3}y^{3/2}=c$. 作变换 $\xi=x$，$\eta=\frac{2}{3}y^{3/2}$，可将方程化为标准形式

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = -\frac{1}{3\eta}u_\eta.$$

§ 10.2　典型二阶线性偏微分方程的建立

本节将通过对几类不同物理现象的分析，导出双曲型、抛物型和椭圆型方程的典型方程—波动方程、热传导方程及 Laplace 方程.

一、振动过程与波动方程

1. 弦的微小横振动方程

设有一根均匀、柔软而有弹性的弦 OA，其长为 l，被拉紧成直线状. 当它在平衡位置附近作垂直于 OA 方向的微小振动，并且在振动过程中弦始终保持在同一平面时，求弦上各点的运动规律. 为此建立如图10-1所示的平面直角坐标系. 用 $u(x,t)$ 表示弦上任意一点 $x(0<x<l)$ 在任意时刻 t 沿着垂直于 Ox 方向的位移. 显然弦的微小横振动可用函数 $u(x,t)$ 来描述.

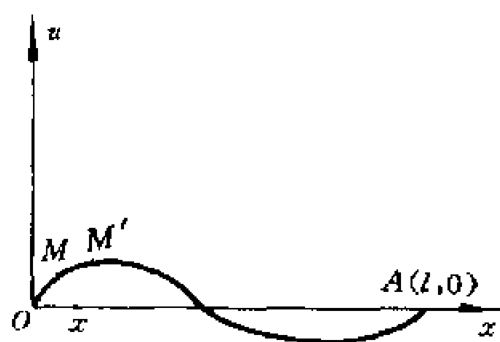


图 10-1

在弦上任取一小段 $\overset{\frown}{MM'}$. 由于弦的振动是微小的，故可认为弦在振动过程中并未伸长，即 $\overset{\frown}{MM'}$ 之长 $\Delta s=\Delta x$. 由 Hooke 定律知，弦上各点处的张力 T 的大小都相同且不随时间而变化，即 $T=|\boldsymbol{T}|$ 是常数. 又由于弦是柔软的，因此弦不抵抗弯曲，故 $\boldsymbol{T}$ 的方向总是沿着弦的切线方向.

现在来分析一下微小弦段 $\overset{\frown}{MM'}$ 在 t 时刻的受力情况（见图10-2），以建立动力学方程，从而导出 $u(x,t)$ 所满足的微分方程.

作用在 $\overset{\frown}{MM'}$ 上的力有：M 点处的张力 $\boldsymbol{T}$，它在 u 轴方向的分

力为$-T\sin\alpha$；M'点处的张力$\boldsymbol{T}$，它在u轴方向的分力为$T\sin\alpha'$；此外还有垂直于x轴的外力$G=F(x,t)\Delta x$，其中$F(x,t)$是G在点x处的线密度(即单位长度上所受的力).

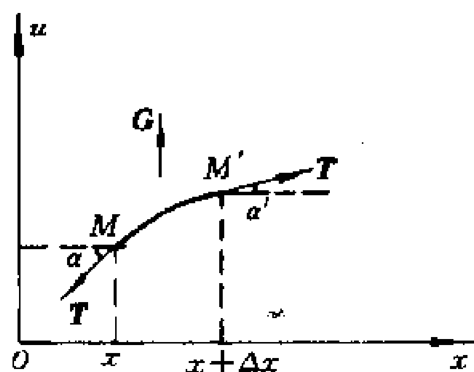


图 10-2

设弦的线密度为ρ. 根据Newton第二定律有

$$T\sin\alpha' - T\sin\alpha + G = \rho\Delta x u_{tt}(x,t).$$

因为$\mathrm{tg}\alpha=u_x$，故

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}.$$

又由于弦作微小振动时，振幅很小，切线的倾角α也很小. 故$|u_x|=|\mathrm{tg}\alpha|$就很小，以致$u_x^2\ll 1$而可忽略不计，因此有$\sin\alpha\approx u_x(x,t)$，同理$\sin\alpha'\approx u_x(x+\Delta x,t)$，于是得

$$T[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] + G = \rho\Delta x u_{tt}(x,t).$$

同除以$\rho\Delta x$得

$$u_{tt}(x,t) = \frac{T}{\rho}\,\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} + \frac{F(x,t)}{\rho},$$

令$\Delta x\to 0$取极限得

$$u_{tt}(x,t) = \frac{T}{\rho}u_{xx}(x,t) + \frac{F(x,t)}{\rho}.$$

若记$a=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$，$f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho}$，则可简写为

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f,\ (0<x<l,\quad t>0). \qquad (10.4)$$

方程(10.4)称为弦的**受迫振动方程**，显然它属于双曲型. 当振动过程中没有外力作用时，$f=0$，方程(10.4)化为齐次方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

它描述了弦的自由横振动.

对细杆的微小纵振动作类似的分析可知,杆上任一点 x 在时刻 t 的纵向位移 $u(x,t)$ 也满足方程(10.4). 分析管道中气体小扰动的传播问题也可得到方程(10.4). 方程(10.4)还可描述导线中电振荡现象,即当电阻和电漏可忽略不计时的电报方程 $v_{tt} = a^2 v_{xx}$,其中 $a=\sqrt{\frac{1}{LC}}$. 总之,方程(10.4)描述的不是一个物理过程,而是一类物理现象—振动和波的传播,通常称为**波动方程**,也称为一维波动方程.

2. 薄膜的横振动方程.

设有一块均匀、柔软且有弹性的薄膜被绷紧成平面块 S. 现考察 S 在平衡位置附近作微小横振动(即垂直于平衡位置的振动)的运动规律. 将平面块 S 置于直角坐标系 $O-xyu$ 的 xy 平面内,用 $u(x,y,t)$ 表示膜上任一点 (x,y)(边界点除外)在任意时刻 t 的位移(即竖坐标),于是问题化为求 $u(x,y,t)$ 所满足的微分方程.

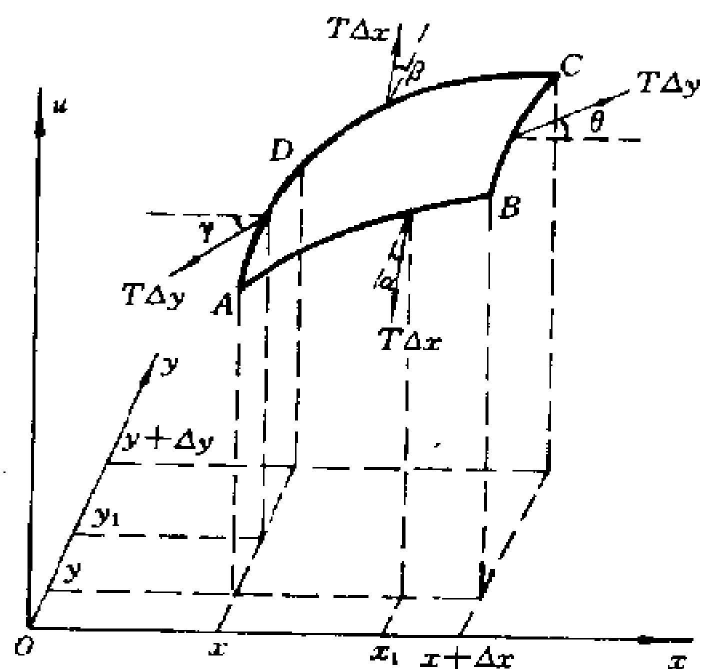


图 10-3

由假设可推知膜在振动过程中并未延伸,故各点 (x,y) 处的张力大小为常量,即与 x,y 及 t 无关且在过点 (x,y) 的切平面内.

任取 S 上一小块 ΔS(其面积仍记为

ΔS)，它在平衡位置时介于 x 与 $x+\Delta x$ 及 y 与 $y+\Delta y$ 之间，在任意时刻 t 其位置如图10-3所示.

在时刻 t 作用在 ΔS 上的力有：四条边界线段上的张力和外力. 设单位长度上的张力为 T，单位面积上的外力为 $F(x,y,t)$. 设 α，β，γ，θ 分别是作用在边界 AB，DC，AD 和 BC 上的张力与 xy 平面的夹角(见图10-3). 由假设推知，$\sin\alpha\approx\mathrm{tg}\alpha$，$\sin\beta\approx\mathrm{tg}\beta$，$\sin\gamma\approx\mathrm{tg}\gamma$，$\sin\theta\approx\mathrm{tg}\theta$，因此作用在四边上的张力在 u 轴方向的投影分别为

$$-T\Delta x\sin\alpha\approx-T\Delta x\,\mathrm{tg}\alpha,\quad T\Delta x\sin\beta\approx T\Delta x\,\mathrm{tg}\beta,$$

$$-T\Delta y\sin\gamma\approx-T\Delta y\,\mathrm{tg}\gamma,\quad T\Delta y\sin\theta\approx T\Delta y\,\mathrm{tg}\theta.$$

由偏导数的几何意义知，$\mathrm{tg}\alpha=\left.\dfrac{\partial u(x_1,y,t)}{\partial y}\right|_{y=y}=u_y(x_1,y,t)$. 其中 x_1 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间. 类似地有 $\mathrm{tg}\beta=u_y(x_2,y+\Delta y,t)$，$\mathrm{tg}\gamma=u_x(x,y_1,t)$，$\mathrm{tg}\theta=u_x(x+\Delta x,y_2,t)$，$x_2$ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间，y_1，y_2 介于 y 与 $y+\Delta y$ 之间. 于是作用在 ΔS 上的所有力在 u 轴方向的合力为

$$T\Delta x[u_y(x_2,y+\Delta y,t)-u_y(x_1,y,t)]$$
$$+T\Delta y[u_x(x+\Delta x,y_2,t)-u_x(x,y_1,t)]+F(x,y,t)\Delta S.$$

设膜的面密度为 ρ($\rho>0$为常数)，由 Newton 第二定律得

$$\rho\Delta S u_{tt}=T\Delta x[u_y(x_2,y+\Delta y,t)-u_y(x_1,y,t)]$$
$$+T\Delta y[u_x(x+\Delta x,y_2,t)-u_x(x,y_1,t)]+F(x,y,t)\Delta S.$$

由假设 $\Delta S\approx\Delta x\Delta y$，同除以 ΔS 后令 $\Delta x\to0$，$\Delta y\to0$取极限(注意到当 $\Delta x\to0$时有 $x_1\to x$，$x_2\to x$；当 $\Delta y\to0$时，$y_1\to y$，$y_2\to y$)得

$$\rho u_{tt}=Tu_{yy}+Tu_{xx}+F(x,y,t).$$

同除以 ρ 并记 $a=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$，$f(x,y,t)=\dfrac{F(x,y,t)}{\rho}$得

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t),$$

这个双曲型方程称为二维波动方程.

3. 电磁场方程

由物理学知，电磁场的性质可以用 Maxwell 方程（微分形式）

$$\begin{cases} \mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho & (1) \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & (2) \\ \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 & (3) \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

及物质方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} & (5) \\ \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} & (6) \\ \boldsymbol{\delta} = \gamma \boldsymbol{E} & (7) \end{cases}$$

来描述. 其中 $\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{E}$ 是电感强度和电场强度，ε 是电介质的介电系数；$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 是磁感强度和磁场强度，μ 是磁介质的磁导率；$\boldsymbol{\delta}$ 是电流面密度；γ 是导电率，ρ 是电荷的体密度.

若单独考虑电场，就要从中消去 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$. 为简单起见，利用 Hamiltom 算子 ∇ 和 Laplace 算子 Δ：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

则 u 的梯度，$\boldsymbol{A}$ 的散度和旋度可分别记为

$$\nabla u,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{A},\quad \nabla\times\boldsymbol{A}.$$

为消去 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$，对(2)式取旋度并利用(6)、(4)式得

$$\begin{aligned} \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\ &= -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H}) \\ &= -\mu\frac{\partial\boldsymbol{\delta}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

因为

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \Delta \boldsymbol{E} = \nabla\left(\frac{1}{\varepsilon}\rho\right) - \Delta \boldsymbol{E}$$

(其中 Δ 与向量 $\boldsymbol{E}$ 作用的意义是：若 $\boldsymbol{E} = \{P, Q, R\}$，则 $\Delta \boldsymbol{E} = \{\Delta P, \Delta Q, \Delta R\}$ 仍是一个向量)，故有

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \Delta \boldsymbol{E} - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho - \gamma\mu \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

同除以 $\varepsilon\mu$ 并记 $a = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}$ 得

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \boldsymbol{E} - \frac{a^2}{\varepsilon} \nabla \rho - \frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

同理，为消去 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$，对(4)式取旋度并利用其余各式及

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \Delta \boldsymbol{H} = -\Delta \boldsymbol{H},$$

就得到描述磁场的方程

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \boldsymbol{H} - \frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}.$$

其中 $a = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}$ 是该介质中电磁波的传播速度. 若在真空中，则 $a = c$ 为光速.

如果电磁场中既无自由电荷也无自由电流，即 $\rho = 0, \gamma = 0$，则上述关于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的方程化为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \boldsymbol{E}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \boldsymbol{H}.$$

以上方程称为三维波动方程. 若设数量函数 $u = u(x, y, z, t)$ 为向量函数 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 的任一分量，则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

三维波动方程不仅可以描述电磁波，而且也能描述空间中的声波以及棒的扭振荡等. 显然三维波动方程是双曲型方程.

二、热传导方程

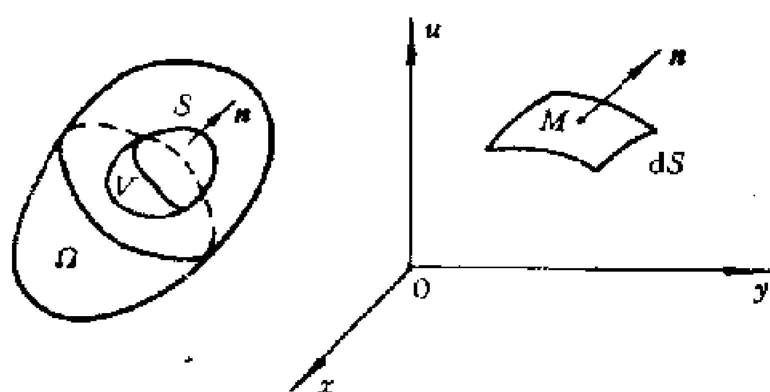


图 10-4

在一个物体内，若各点处的温度不同，就会有热量从温度较高处流向温度较低处，这种现象就是热传导. 由于物体内热量的传导过程总是表现为物体内温度随点的位置和时间而变化，因此研究热传导问题就归结为求物体内部温度的分布. 在生产实际中，求物体内部温度分布是随处可见的. 比如土建和水利工程的设计和施工中要控制浇铸的混凝土内的热应力，以防裂缝；内燃机汽缸活塞内部的热应力是使活塞在运行中产生裂纹的重要原因. 要解决这些问题就要计算热应力，而首先必须知道温度的分布.

假设空间物体 Ω 内任意一点 (x,y,z) 在时刻 t 的温度为 $u(x,y,z,t)$. 下面求 $u=u(x,y,z,t)$ 所满足的微分方程.

建立这个方程所依据的物理规律是传热学中的热量守恒定律和 Fourier 定律：设在时间区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，流过点 $M(x,y,z)$ 处面积为 $\mathrm{d}S$ 的曲面的热量为 $\mathrm{d}Q$，则

$$\mathrm{d}Q=-k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\mathrm{d}t=-k(x,y,z)\mathbf{grad}\,u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

其中比例系数 $k(x,y,z)$ 称为物体的导热系数(大于零)，$\boldsymbol{n}$ 是曲面在 M 点的外法线单位向量，负号“－”表示热流方向与温度梯度方向相反.

在 Ω 中任取一封闭曲面 S，记 S 所包围的区域为 V. 于是从时刻 t_1 到 t_2，通过曲面 S 流出区域 V 的热量为

$$Q_1=-\int_{t_1}^{t_2}\left[\oiint_S k\mathbf{grad}\,u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_V \mathrm{div}(k\mathbf{grad}\,u)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}t$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint\limits_V\left(\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial u}{\partial z})\right)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}t.$$

若物体内有热源(如通有电流或有化学反应等)，其密度为 $F(x,y,z,t)$(在时刻 t 于点 (x,y,z) 处单位时间内、单位体积所放出的热量)，则在 $[t_1,t_2]$ 内于 V 中产生的热量为

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint\limits_V F(x,y,z,t)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}t.$$

由于热量的传递，V 内各点的温度发生了变化. 在 $[t_1,t_2]$ 内温度变化所需热量为

$$\begin{aligned} Q_3 &= \iiint\limits_V c\rho[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]dv \\ &= \iiint\limits_V\left[\int_{t_1}^{t_2} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}v \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

其中 c,ρ 分别是物体的比热和密度.

由热量守恒定律有 $Q_3=Q_2-Q_1$，即

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint\limits_V F(x,y,z,t)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint\limits_V \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}u)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

由于时间区间 $[t_1,t_2]$ 及 V 都是任意的，因此当假定各个被积函数都是连续的时候，得

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial u}{\partial z}) + F(x,y,z,t).$$

若物体是均匀且各向同性的，则 c,ρ,k 都是常数，故方程成为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t),$$

简写为

$$u_t = a^2\Delta u + f,$$

其中$a=\sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}$，$f=\dfrac{F}{c\rho}$. 此方程叫做三维**热传导方程**，显然它属于抛物型.

当传热物体 Ω 是一块表面绝热的均匀薄板时，其内各点(x,y)在时刻 t 的温度 $u(x,y,t)$满足二维热传导方程

$$u_t = a^2\Delta u + f = a^2(u_{xx}+u_{yy}) + f(x,y,t).$$

若 Ω 是一根侧面绝热的均匀细杆，则有一维热传导方程

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t).$$

即使 Ω 不是细杆(或薄板)，但如果其中的温度 u 只与 x,t(或x,y,t)有关，则该物体内的温度分布也由一维(或二维)热传导方程描述.

在 Ω 内无热源 即 $f=0$时，对应的热传导方程是二阶线性齐次方程.

热传导方程不仅描述了热量的传递现象，而且可以描述一切由于内部各点密度或浓度不同而引起的扩散现象. 例如制造半导体时掺入的杂质(锑、硼、磷等)的扩散现象；溶液内各点浓度不同而引起的扩散现象等等. 导电线圈所围的柱体内的磁场也满足热传导方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = a^2\Delta \boldsymbol{H},\ a^2 = \frac{c^2}{\mu\gamma}.$$

例 10.4 考察充有多孔介质的柱形管内的扩散过程. 假定在每一时刻管的横截面上各点的气体(或溶液)浓度是相同的. 建立坐标系如图10-5，于是扩散过程可以用任意时刻 t 在任意截面 x 处的浓度 $u(x,t)$来描述.

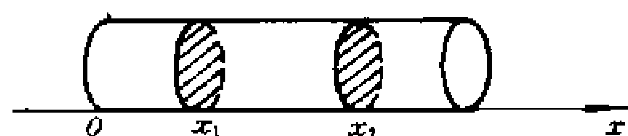


图 10-5

依照 Nernst 定律，在时段$[t,t+\mathrm{d}t]$内沿

Ox 轴正向通过截面 x 的气体质量为

$$\mathrm{d}M = -D\frac{\partial u}{\partial x}A\mathrm{d}t$$

其中 $D>0$是扩散系数，A 是管的横截面积，负号"$-$"表示气体分子从浓度高处往浓度低处扩散，与浓度的梯度方向相反.

在时段$[t_1,t_2]$内通过截面 x_1和 x_2进入管段$[x_1,x_2]$中的气体质量为

$$M_1 = \int_{t_1}^{t_2} A[D(x_2)u_x(x_2,t) - D(x_1)u_x(x_1,t)]\mathrm{d}t\,.$$

从时刻 t_1到时刻 t_2，截面 x 上的气体浓度的增量为 $u(x,t_2)-u(x,t_1)$. 于是在这段时间内管段$[x_1,x_2]$中气体质量的增量为

$$M_2 = \int_{x_1}^{x_2} c(x)A[u(x,t_2)-u(x,t_1)]\mathrm{d}x,$$

其中 $c(x)$是孔积系数(孔隙体积与总体积之比).

假如管内没有产生或吸收气体的物质源，也没有渗过管壁的扩散，则由质量守恒定律，有 $M_1=M_2$，即

$$A\int_{t_1}^{t_2}[D(x_2)u_x(x_2,t) - D(x_1)u_x(x_1,t)]\mathrm{d}t$$

$$= A\int_{x_1}^{x_2} c(x)[u(x,t_2) - u(x,t_1)]\mathrm{d}x,$$

两边分别应用 Newton-Leibniz 公式得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial u}{\partial x})\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{t_1}^{t_2} c(x)\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x.$$

由 x_1,x_2,t_1,t_2的任意性，并假定上式两端的被积函数都是连续的，故有

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial u}{\partial x}).$$

若介质均匀，即 c 和 D 为常数，则得

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

（其中 $a=\sqrt{\frac{D}{c}}$），称之为一维**扩散方程**，它与内部无热源的均匀细杆的热传导方程完全一样．当管内有物质源时，一维扩散方程为

$$u_t = a^2u_{xx} + f(x,t).$$

当研究气体在空间 Ω 内扩散时，依据 Nernst 扩散定律和质量守恒定律，采用导出热传导方程同样的方法，就会得到完全相同的四个自变量的抛物型方程，只是其中 u,a,f 的物理意义不同罢了．

三、稳定状态与 Laplace 方程、Poisson 方程

前面建立的两类方程描述的都是与时间 t 有关的物理过程．当这些过程不再与时间 t 有关，即达到了稳定状态时，由于 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$（注意此时 u 仍是位置变量的函数），则两类方程都变为

$$\Delta u = f,$$

称之为 Poisson 方程，当 $f=0$ 时，即

$$\Delta u = 0$$

称为 Laplace 方程．

比如真空中静电场的 Gauss 定律的微分形式是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x,y,z).$$

由于静电场是无旋场，所以必有

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}u(x,y,z) = -\nabla u,$$

u 是电势，于是得 Poisson 方程

$$\Delta u = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho.$$

当所考虑的区域内没有电荷，即 $\rho=0$ 时，则得 Laplace 方程

$$\Delta u = 0.$$

又比如热传导过程中，热源不随时间变化且温度也达到稳定

分布时的热传导方程就成为 Poisson 方程，无热源时便是 Laplace 方程.

考虑静磁场、不可压缩流体的无旋流动、稳定浓度的扩散过程等都会导出 Poisson 方程和 Laplace 方程，故这种方程也叫做**位势方程**.

显然 Laplace 方程和 Poisson 方程是椭圆型方程.

§10.3 定解条件与定解问题的提法

上节导出偏微分方程时，只涉及某类物理过程所遵从的一般规律，而且方程只被物体（如弦、薄膜、导热体等）内部各点的状态所满足. 而一个具体物理问题除遵从一般规律外，总还有其特定的条件，比如初始时刻的状态，边界点处的状态等. 这些就是区分具体问题与这一类过程中其它问题的条件. 从数学角度讲，一个偏微分方程有无穷多个解，而一个具体物理问题的解，应该是唯一存在的. 因此称这些条件为**定解条件**. 没有附加定解条件的方程叫做**泛定方程**，一个泛定方程连同其定解条件一起合称为一个**定解问题**. 一个具体物理过程的数学模型应该是一个定解问题.

一、定解条件的数学表示

定解条件主要包括**初始条件**—描述物体初始状态的条件，及**边界条件**—描述物体边界状态的条件.

1. 初始条件

与常微分方程类似，偏微分方程中出现了对时间 t 的几阶导数，就应给出几个初始条件.

对于波动方程

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f,$$

应给出未知函数 u 及 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 在初始时刻（一般总可设 $t=0$）在各点 M

处的值，即

$$u(M,t)|_{t=0}=\varphi(M),\ u_t(M,t)|_{t=0}=\psi(M),\ M\in\Omega.$$

对于二维振动现象，$\varphi(x,y)$和$\psi(x,y)$分别表示$t=0$时薄膜内各点的位移和速度.

对于热传导方程和扩散方程

$$u_t=a^2\Delta u+f,$$

只有一个初始条件

$$u(M,0)=\varphi(M),\ M\in\Omega,$$

$\varphi(M)$表示物体内各点的初始温度或浓度.

对于 Laplace 方程和 Poisson 方程，因其不含时间变量，故无需给出初始条件.

2. 边界条件

从数学上讲，边界条件主要有三类.

第一类边界条件：给出未知函数u在区域Ω的边界Γ上的值

$$u|_\Gamma=\mu(M,t)\quad M\in\Gamma,\quad t\geqslant 0.$$

对于一维方程，边界Γ是两个端点a和b，其第一类边界条件应表示为

$$u(x,t)|_{x=a}=\mu_1(t),\ u(x,t)|_{x=b}=\mu_2(t),\ t\geqslant 0.$$

例如在长为l的弦作微小横振动问题中，若弦的左端点($x=0$端)固定在x轴上，而右端点($x=l$端)作简谐振动$A\sin\omega t$，则其边界条件为

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=A\sin\omega t,\ t\geqslant 0.$$

又如细长杆热传导问题中，若$x=0$端的温度变化规律为kt(k为常数)，而$x=l$端的温度恒为u_0，则其边界条件为

$$u(0,t)=kt,\ u(l,t)=u_0,\ t\geqslant 0.$$

对于空间物体的导热问题，$\mu(x,y,z,t)$表示边界曲面Γ上的温度分布.

第二类边界条件：给出未知函数u沿边界Γ的外法向$\boldsymbol{n}$的方

向导数值

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\nu(M,t),\quad M\in\Gamma,\ t\geqslant 0.$$

在一维情况下，由于$\frac{\partial u}{\partial n}$在左右端点 a 和 b 处分别为 $-\frac{\partial u}{\partial x}$ 和$\frac{\partial u}{\partial x}$，因此给出的是 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在 a 和 b 处的值 $\nu_1(a,t)$ 和 $\nu_2(b,t)$.

这种边界条件中 $\nu(M,t)$的物理意义不很明显，现解释如下.

(1) 对一维波动问题(弦的横振动，杆的纵振动等)，$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\nu_1(t)$表示在左端点处受到一个沿位移方向的持续外力的作用. 设左端点受力 $\nu(t)$作用，由于左端点还受到张力 $\boldsymbol{T}$ 的作用，而 $\boldsymbol{T}$ 在位移方向的分力为 $Tu_x(0,t)$，$Tu_x(0,t)$与 $\nu(t)$的大小相等方向相反，即$-Tu_x(0,t)=\nu(t)$，从而有

$$u_x(0,t)=-\frac{\nu(t)}{T}=\nu_1(t).$$

若左端点是自由端——在振动过程中不受外力作用($\nu(t)\equiv 0$)，能自由地运动，则有

$$u_x(0,t)=0.$$

以上分析完全适用于右端点.

(2) 对热传导问题，$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\nu(M,t)$ 表示导热物体边界 Γ 上各点处热流强度(单位时间内单位面积上流过的热量)是已知的. 例如自边界曲面 Γ 有强度为 $q(x,y,z,t)$的热量流出，则由 Fourier 定律有

$$q(x,y,zt)\mathrm{d}S\mathrm{d}t=-k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=-\frac{q(x,y,z,t)}{k}=\nu(x,y,z,t),\quad (x,y,z)\in\Gamma,\quad t\geqslant 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 表示 Γ 的外法线方向. 如果热量是经过边界 Γ 流入，则依

Fourier 定律有

$$q\mathrm{d}S\mathrm{d}t = k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

此时对应的边界条件为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\nu(x,y,z,t)=\frac{q(x,y,z,t)}{k},\quad (x,y,z,)\in\Gamma,\quad t\geqslant 0.$$

细杆导热问题的第二类边界条件也要分左右端点分别给出，并要注意

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=0}=-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0},\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=l}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}.$$

若 $\nu=0$，即边界是绝热的，则相应的边界条件为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0.$$

第三类边界条件：给出未知函数 u 与 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的线性组合在 Γ 上的值

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Big|_{\Gamma}=\omega(M,t),\quad M\in\Gamma,\quad t\geqslant 0.$$

在杆的纵振动问题中，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\Big|_{x=l}=\omega(t)$$

描述了杆的弹性支承端（$x=l$ 端）所受外力的情况. 设端点 $x=l$ 被某个弹性体（比如弹簧）所支承，若弹性体原来的位置为 $u=0$，则 $u|_{x=l}$就表示弹性支承的应变. 由 Hooke 定律知，应变引起的弹性恢复力 $F=-ku|_{x=l}$（$k>0$为弹性体的倔强系数）. 若杆的端点 $x=l$ 处还受到一个位移方向的外力 $\theta(t)$的作用，则在此端点的张力 $T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$ 应与 $-ku|_{x=l}+\theta(t)$ 相等. 于是有$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\Big|_{x=l}=\omega(t)$. 其中 $\sigma=\frac{k}{T}$，$\omega(t)=\frac{\theta(t)}{T}$. 当端点 $x=l$ 处不受外力只有弹性支承时，$\theta(t)\equiv 0$，从而 $\omega(t)\equiv 0$. 此时端点 $x=l$ 的状态应描述为

$$(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u)|_{x=l}=0.$$

对于热传导问题,第三类边界条件的物理意义比较明显.

当导热体边界上的温度 $u(M,t)$ 与周围介质的温度 $T(M,t)(M\in\Gamma)$ 不相等时,就会发生热交换.依热交换的 Newton 定律知,从物体内部经过边界 Γ 流出的热量 $-k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}$ 与温度差 $[u(M,t)-T(M,t)]$ 成正比,即

$$-k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=h[u(M,t)-T(M,t)],\quad M\in\Gamma,$$

其中 $h>0$ 是物体对介质的热交换系数.于是就有第三类边界条件

$$(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u)|_{\Gamma}=\omega,\ (\sigma=\frac{h}{k},\ \omega=\frac{hT(M,t)}{k}).$$

例如在细长杆导热问题中,若 $x=l$ 端自由冷却,环境温度为 $Q(t)$,则在热传导过程中,此端点的状态就被描述为

$$-k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=h[u(l,t)-Q(t)],$$

即
$$(u_x+\sigma u)|_{x=l}=\omega(t),\ \sigma>0.$$

在 $x=0$ 端自由冷却时,则有

$$-k(-\frac{\partial u}{\partial x})|_{x=0}=h[u(0,t)-Q(t)],$$

即
$$(u_x-\sigma u)|_{x=0}=\omega(t),\ \sigma>0.$$

第三类边界条件有时称为混合边界条件,当 $\sigma=\frac{h}{k}\gg1$ 即 $h\gg k$ 时,说明物体与介质间的热交换能力很强,故物体边界上的温度可认为与介质温度一致.此时第三类边界条件可写为

$$u|_{\Gamma}=\omega,$$

变成了第一类边界条件.相反,若 $\sigma\ll1$ 即 $h\ll k$,则边界条件可近似写为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0\text{—— 第二类边界条件.}$$

这时，在物体与介质之间的热交换能力很弱，故可认为物体表面是绝热的.

上述的三种边界条件都是关于 u 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的线性式，故称为**线性边界条件**. 当边界条件中右端的函数恒为零时，就称它为**齐次边界条件**，否则称为非齐次边界条件.

二、定解问题的提法

只有初始条件而无边界条件的定解问题称为**始值问题**或 **Cauchy 问题**. 例如研究细长杆的导热问题时，若端点处的温度对传热过程影响很小，可忽略不计，此时可认为杆是无界的，其定解问题为

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases},$$

就是 Cauchy 问题.

既有初始条件又有边界条件的定解问题叫做**初边值问题**或**混合问题**.

对于 Laplace 方程和 Poisson 方程来说，只有边界条件而无初始条件，这样的定解问题称为**边值问题**. 若边界条件都是第一(或第二，或第三)类的，就称其为第一(或第二，或第三)边值问题. 第一边值问题也叫 **Dirichlet 问题**，第二边值问题也叫 **Neumann 问题**，第三边值问题也称为 **Robbin 问题**.

例 10.5　考察一根相当长的弦的横振动. 当考察的区间离两个(或一个)端点充分远，以致在所考察的时间范围内该区间的振动不受端点状态的影响，这时可视弦为无界(半无界)的. 无界弦的振动用始值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

来描述.

例 10.6　长为 l，左端点固定，右端点自由的弦的受迫振动用混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < l,\quad t > 0 \\ u\big|_{x=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0,\ t \geqslant 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

来描述.

例 10.7　内部无热源的圆形薄板内稳态温度分布，当边界上温度已知时，用 Laplace 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x^2 + y^2 < R^2 \\ u\big|_{x^2+y^2=R^2} = \varphi(x,y) \end{cases}$$

来描述.

三、定解问题的适定性

定解问题是从物理问题抽象概括出来的. 在建立方程和提出定解条件时曾做过各种简化，因此它提得是否符合实际情况，必须由实践来检验. 由于一个定解问题是一个具体物理问题的数学模型，因此，若它正确地反映了这个物理问题，那么它的解必须是存在且唯一的.

此外，定解条件中的许多初始数据都是由测量得到的，必然会有误差. 当定解条件作微小改变时，要求定解问题的解也只有微小变化，即要求解是稳定的，亦即对定解条件是连续依赖的.

若一个定解问题的解存在、唯一且稳定，则称该定解问题是**适定的**，否则就称为不适定的. 适定性是从数学角度衡量定解问题提得是否恰当的标准. 关于适定性的研究，超出了本书的讨论范围，我们只在适当的地方指出某些定解问题在什么条件下是适定的.

习　题　十

1. 证明

(1) 方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 在 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 内有解 $u(x,y)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(2) $u=\dfrac{1}{r}$（其中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\neq 0$）是方程

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$$

的解.

2. 设 f 是任意的连续可微函数，验证 $u=f(xy)$ 满足方程 $yu_y-xu_x=0$.

3. 设 $F(z)$,$G(z)$ 是任意二次可微函数，验证

$u(x,y)=F(x+\lambda_1 y)+G(x+\lambda_2 y)$（其中 λ_1,λ_2 是不相等的常数）

满足方程

$$u_{yy}-(\lambda_1+\lambda_2)u_{xy}+\lambda_1\lambda_2 u_{xx}=0.$$

4. 判断下列方程所属类型.

(1) $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}-4u_{yz}+u_{zz}+u_x-5u_y+x^3=0$；

(2) $u_{xx}+xu_{yy}+yu_{zz}+u_{tt}+6u_x+xytu+f=0$.

5. 求下列方程的标准形式.

(1) $u_{xx}+xu_{yy}=0$；

(2) $yu_{xx}+xu_{yy}=0$；

(3) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$.

6. 设有均匀细杆，若其中任一小段有纵向运动，则必然会使邻近段受到压缩或伸长，这种伸缩传开去，即为杆的纵波传播. 假设振动过程中所发生的张力服从 Hooke 定律，试导出杆的纵振动方程.

7. 试推导一维和二维热传导方程.

8. 弦在阻尼介质中作微小横振动，单位长度受到的阻力与速度成正比. 试推导弦的阻尼振动方程.

9. 设某种溶质在溶液中扩散. 以 $u(x,y,z,t)$ 表示溶液中任一点 $M(x,y,z)$ 处在时刻 t 的浓度. 根据 Nernst 定律，溶质在时间区间 $[t,t+dt]$ 内通过 M 点处面积为 dS 的曲面扩散的质量为

$$\mathrm{d}M = -D\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\ ,$$

其中 D 是扩散系数，$\boldsymbol{n}$ 是小曲面块 $\mathrm{d}S$ 的外法向量. 试导出 u 所满足的偏微分方程.

10. 长为 l 的均匀杆，上端固定于电梯轿厢天花板，杆身竖直，下端自由. 电梯以匀速 v_0 下降，在 $t=0$ 时突然停止而引起杆的纵振动. 写出描述此杆振动过程的定解问题.

11. 长为 l 的均匀杆，内部无热源两端有恒定热流进入，其强度为 q_0，初始温度分布为 $\varphi(x)$，试写出其定解问题.

12. 设圆柱体 Ω 内无自由电荷，其侧面及下底接地(即电势为零)，上底的电势已知. 试写出描述 Ω 内静电场的电势分布的定解问题.

13. 设球面 $r=a$ 上的温度分布为 $g(\theta,\varphi)$，球体内温度呈稳定状态. 在球坐标系中写出相应的定解问题.

14. 考察一块矩形薄膜的自由横振动，设其四边固定，初始时刻处于水平位置，但有横向运动的速度. 试写出相应的定解问题.

第十一章　定解问题的分离变量解法

分离变量法是求解定解问题的最常用的方法之一，也是最典型的方法．三类方程的混合问题都可以用分离变量法求解，当然对高维情况，要求求解区域具有某种特殊性．

分离变量法的基本思想是，先求出齐次方程满足齐次边界条件的一系列变量分离形式的解，再根据叠加原理得到一个级数形式的解，然后利用其余定解条件定出其中的常数系数，从而得出齐次方程、齐次边界条件的混合问题的解．

用分离变量法求解定解问题的基础是叠加原理．

设有二阶线性偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f.$$

引入线性微分算子

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

后，方程可简记为

$$Lu = f.$$

通过直接计算，容易验证 $Lu=f$ 具有下面的特性．

叠加原理　设 u_k 是方程

$$Lu_k = f_k \qquad (k = 1,2,\cdots)$$

的解，若对于任意常数 α_k，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k u_k$ 都收敛，并且 $u=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k u_k$ 能对各个自变量逐项求导两次，则 u 是方程

$$Lu = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k f_k$$

的解．

§11.1 一维齐次方程、齐次边界条件混合问题的分离变量解法

一、分离变量法

分离变量法有着现实的物理背景：当考虑弦的微小横振动时，将所考虑的振动分解成一系列不同频率 λ 的驻波的叠加，而每个驻波

$$v_\lambda(x,t) = A_\lambda(t)\sin\lambda x$$

都是 x 的函数与 t 的函数之乘积．即弦的振动可用

$$u(x,t) = \sum_\lambda v_\lambda(x,t)$$

来描述．现以解两端固定的弦的自由振动问题

$$(\text{I})\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0 & (11.1)\\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0,\ t \geqslant 0 & (11.2)\\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 < x < l & (11.3)\end{cases}$$

为例，介绍分离变量法．

设方程(11.1)满足条件(11.2)的非零解为

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

将 $u(x,t)$ 代入方程(11.1)并分离变量得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

由于上式左端仅为 t 的函数，右端仅为 x 的函数，且 x 与 t 是互相独立的自变量，因此要使等式成立，只能为常数．设此常数为 $-\lambda$，即

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

由此得到两个常微分方程

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{11.4}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{11.5}$$

由边界条件(11.2)并注意到 $T\neq 0$，我们有 $X(0)=0, X(l)=0$. 于是得定解问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (11.5) \\ X(0) = 0, X(l) = 0 & (11.6) \end{cases}$$

这是一个含参量 λ 的齐次方程、齐次边界条件的常微分方程边值问题. 显然它有零解，它是否有非零解，这将取决于参量 λ 的取值范围. 使该问题有非零解的那些 λ 的值称为**固有值**(或本征值)，与固有值对应的非零解称为**固有函数**(或本征函数)，而该问题就称为**固有值**(或本征值)**问题**.

当 $\lambda<0$ 时，方程(11.5)的通解为

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

其中 A,B 为任意常数. 由条件(11.6)有

$$\begin{cases} A+B=0 \\ e^{l\sqrt{-\lambda}}A+e^{-l\sqrt{-\lambda}}B=0 \end{cases},$$

由此得 $A=B=0$. 故此时无非零解，$\lambda<0$ 不是固有值.

当 $\lambda=0$ 时，方程(11.5)的通解为

$$X(x) = Ax + B,$$

由条件(11.6)得 $A=B=0$，故 $X(x)\equiv 0$，即 $\lambda=0$ 也不是固有值.

当 $\lambda>0$ 时，方程(11.5)的通解为

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

由 $X(0)=0$ 得 $A=0$，即 $X(x)=B\sin\sqrt{\lambda}x$，又由 $X(l)=0$ 得

$$B\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

为得到非零解，必须 $B\neq 0$，于是有

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

即 $\sqrt{\lambda}=n\pi$，从而得

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \qquad (n = 1,2,\cdots),$$

及其对应的非零解

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

故 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 为固有值，相应的固有函数为

$$\sin \frac{n\pi}{l} x, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

对应于 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$，方程(11.4)的通解为

$$T_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

其中 C_n, D_n 为任意常数．

这样，我们得到了齐次方程(11.1)的满足边界条件(11.2)的一个解系 $\{u_n(x,t)\}$：

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x) T_n(t) \\ &= \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l} t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \end{aligned} \tag{11.7}$$

其中 $a_n = C_n B_n$，$b_n = D_n B_n$ 仍是任意常数，$n = 1, 2, \cdots$.

一般说来，解系(11.7)中的任何一个不一定满足初始条件(11.3)．因为当 $t=0$ 时，

$$u_n(x,0) = a_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$\frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t} = b_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

而初始函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是任意给定的，故 $u_n(x,t)$ $(n=1,2,\cdots)$ 一般地还不是定解问题(Ⅰ)的解．为得到定解问题(Ⅰ)的解，我们将解系(11.7)叠加起来得

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l} t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{11.8}$$

当这个级数收敛且能对 x 和 t 逐项求导两次时，则由叠加原理知，其和函数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \quad (11.9)$$

仍然是方程(11.1)的解,且由于它的各项都满足边界条件(11.2),故 $u(x,t)$ 也满足边界条件(11.2).

要使 $u(x,t)$ 满足初始条件(11.3),只需

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x),$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x).$$

若初始函数 φ 和 ψ 在 $[0,l]$ 上都满足展成 Fourier 级数的条件,则可得

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \\ b_n=\dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \end{cases} \quad n=1,2,\cdots. \quad (11.10)$$

将 a_n 和 b_n 代入(11.9),便得到定解问题(Ⅰ)的级数形式的解.

以上通过分离变量,求出定解问题的级数解的方法叫做**分离变量法**.

应当注意,为导出定解问题(Ⅰ)的解,我们曾假定级数(11.8)收敛且可对 x 和 t 逐项求导两次,因此只要求 φ,ψ 能展成 Fourier 级数显然是不够的,还需对 φ 和 ψ 作更多的要求.

定理 11.1 当 $\varphi\in C^3[0,l]$,$\psi\in C^2[0,l]$ 且 $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=\psi(0)=\psi(l)=0$ 时,定解问题(Ⅰ)的解存在且由(11.9)式给出,其中的系数 a_n,b_n 由(11.10)式确定(证明从略).

此外,在由 $\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$ 确定固有值 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 时,n 还可取负整数 $-1,-2,\cdots$,但由于 $\sin\frac{-n\pi}{l}x=-\sin\frac{n\pi}{l}x$,并没有增加固有函数系 $\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$ 中函数的个数,因此不必考虑 n 取负数的情

况. 今后遇到类似的情况不再说明.

例 11.1 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l, \quad t>0 \\ u|_{x=0}=0, u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=x(l-x), u_t|_{t=0}=0 \end{cases}.$$

解 因为

$$\varphi(x)=x(l-x), \psi(x)=0,$$

所以由公式(11.10)得

$$b_n=0,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4l^2}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n], \qquad n=1,2,\cdots.$$

代入公式(11.9)得定解问题的解

$$u(x,t)=\frac{4l^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$=\frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\cos\frac{(2k-1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x.$$

二、广义解概念

例 11.2 设长为 l 的弦,其两端 $x=0, x=l$ 固定. 在 $x=c(0<c<l)$ 点处将弦拉高 h(图 11-1),然后放开,让其自由振动,求弦的振动规律.

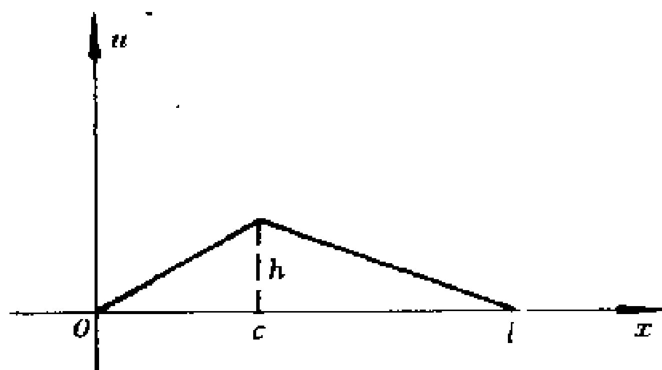


图 11-1

解 定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \\ u(x,0)=\begin{cases} hx/c & \text{当 } 0<x<c \\ h(l-x)/(l-c) & \text{当 } c\leqslant x<l \end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

因为 $\psi(x)=0$，所以 $b_n=0\ (n=1,2,\cdots)$.

而

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{l}\int_0^c \frac{hx}{c}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x + \frac{2}{l}\int_c^l \frac{h(l-x)}{l-c}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2hl^3}{\pi^2 c(l-c)n^2}\sin\frac{n\pi c}{l}, \qquad n=1,2,\cdots. \end{aligned}$$

代入(11.8)得

$$\tilde{u}(x,t)=\frac{2hl^3}{c(l-c)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi c}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

但是由于初始函数 φ 在 $x=c$ 处的一阶导数不存在，故不满足定理 11.1 的条件，因此 $\tilde{u}(x,t)$ 只是形式上的解.

当定解问题(Ⅰ)中的初始函数 φ 或 ψ 不满足定理 11.1 的条件时，我们无法得到通常意义下的解(即古典解)，而往往去求所谓广义解：

假设 $\varphi\in L^2[0,l]$，$\psi\in L^2[0,l]$. 选取 $\{\varphi_k\}\subset C^3[0,l]$，$\{\psi_k\}\subset C^2[0,l]$(例如 φ,ψ 在 $[0,l]$ 上的 Fourier 级数的部分和序列)，使得 $\varphi_k\to\varphi$，$\psi_k\to\psi$.

对于每个 $k\in N$，用分离变量法得到解

$$u_k(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(k)}\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n^{(k)}\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$a_n^{(k)}=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi_k(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$
$$n\in N,k\in N.$$
$$b_n^{(k)}=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi_k(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$

若$\{u_k\}$收敛于 u,则称函数 $u(x,t)$为定解问题(Ⅰ)的广义解.

需要指出,这里的收敛是按 $L^2[0,l]$中的范数的收敛,即是函数序列的平均收敛,因此这种意义下的广义解 $u(x,t)$本身不一定是连续的.还有其它意义下的广义解.本书不讨论广义解,以下总假设初始函数满足定理 11.1 的条件.

三、级数解的物理意义

用分离变量法得到的波动方程混合问题的解(即使是形式上的解)有明显的物理意义.

考察级数解的每一项

$$u_n(x,t)=\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$
$$=A_n\sin(\omega_nt+\delta_n)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中 $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $\mathrm{tg}\delta_n=\frac{a_n}{b_n}$, $\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$.

我们知道,$A_n\sin(\omega_nt+\delta_n)$表示角频率为 ω_n,初相为 δ_n 的简谐振动,因此

$$u_n(x,t)=A_n\sin\frac{n\pi x}{l}\sin(\omega_nt+\delta_n)$$

描述的是这样的振动波:弦上各点 x 都以同一角频率及相同初相振动,但振幅$|A_n\sin\frac{n\pi x}{l}|$却依点 x 的位置而变化.在点 $x=0,\frac{l}{n},\frac{2l}{n},\cdots,\frac{(n-1)l}{n},l$ 处,振幅 $|A_n\sin\frac{n\pi x}{l}|=0$,表明这些点并没有振动,称它们为振动波 u_n 的节点或波节,而在点 $x=\frac{l}{2n},\frac{3l}{2n},\cdots,\frac{(2n-1)l}{2n}$处,振幅$|A_n\sin\frac{n\pi x}{l}|=A_n$ 达到最大值,称这些点为振动

波 u_n 的腹点或波腹,这种振动波称为**驻波**. 驻波的波形($u_n(x,t)$ 在时刻 t 的图形)由固有函数 $\sin\frac{n\pi}{l}x$ 决定,频率由固有值 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 决定.

由以上分析可知,波动方程混合问题的级数解表示一系列驻波的叠加,故分离变量法又称为**驻波法**.

四、热传导方程混合问题的分离变量解法

上述分离变量法同样适用于求解热传导方程的混合问题,只要方程和边界条件都是齐次的.

例 11.3 解长为 l,两端温度均为 0°,初始温度分布为 $\varphi(x)$ 的均匀细杆导热的定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0\\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}.$$

解 设解为 $u(x,t)=X(x)T(t)$,代入方程并化简得

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

于是有

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0,$$
$$X''(x)+\lambda X(x)=0.$$

由齐次边界条件得固有值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X(0)=X(l)=0\end{cases}.$$

由前面的讨论知,固有值为 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n=1,2,\cdots$, 固有函数系为 $\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}, n=1,2,\cdots$.

将 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 代入关于 $T(t)$ 的方程得

$$T'(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T(t)=0,$$

其通解为

$$T_n(t)=C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t},\quad n=1,2,\cdots.$$

利用叠加原理得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x. \end{aligned} \tag{11.11}$$

其中 $a_n=B_nC_n$.

由初始条件得

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

故
$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

将 a_n 代入(11.11)就得到所求定解问题的级数解.

五、各种齐次边界条件下的固有值与固有函数系

用分离变量法求出的解,实质上是将解 $u(x,t)$ 对于变量 x 展成关于固有函数系的 Fourier 级数. 因此这种方法的关键在于,根据固有值问题求出一个完全正交的固有函数系来. 不同类型的齐次边界条件对应不同的固有值和固有函数系. 下面就一维问题给出各种情况下的固有函数系,其正交性和完全性将在 § 11.4 中给出.

1. 两端的边界条件都是第一类

由前知,此时固有值问题为

$$\begin{cases} X''(x)+X(x)=0 \\ X(0)=0, X(l)=0 \end{cases},$$

固有值为 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n=1,2,\cdots$, 固有函数系为 $\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$.

2. 两端的边界条件都是第二类

设 $u(x,t)=X(x)T(t)$是非零解，与前类似，将其代入方程分离变量，并利用第二类齐次边界条件得固有值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\X'(0)=0,\ X'(l)=0\end{cases}.$$

当 $\lambda<0$ 时，$X(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$. 由边界条件得 $A=B=0$，故 $\lambda<0$ 不是固有值.

当 $\lambda=0$ 时，$X(x)=A+Bx$. 由 $X'(0)=0$ 得 $B=0$，故 $X(x)=A$，显然它满足 $X'(l)=0$. 此时有非零解

$$X(x)=A\neq 0.$$

因此 $\lambda=0$ 是固有值.

当 $\lambda>0$ 时，$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$.

由 $X'(0)=0$ 得 $B=0$，所以 $X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x$. 又因为 $X'(l)=0$，故 $A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l=0$. 为得到非零解，必须 $A\neq0$，又 $\sqrt{\lambda}>0$，于是

$$\sin\sqrt{\lambda}l=0.$$

由此得到 $\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$，$n=1,2,\cdots$. 对应的非零解为

$$X_n(x)=A_n\cos\frac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

考虑到 $\lambda=0$ 时，$X(x)=A\neq0$ 也是非零解，不妨记为 $X_0(x)=A_0$，故此时固有值序列为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

固有函数系为

$$\{\cos\frac{n\pi}{l}x\},\quad n=0,1,2\cdots.$$

例 11.4 解定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\ t>0\\u_x(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0\\u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)\end{cases}.$$

解 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$,代入方程及边界条件中,得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,\quad X'(0)=X'(l)=0.$$

于是有

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0,$$

及固有值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\X'(0)=X'(l)=0\end{cases}.$$

固有值为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

对应的非零解为

$$X_n(x)=A_n\cos\frac{n\pi x}{l},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

将 λ_n 代入关于 $T(t)$ 的方程,解得

$$T_0(t)=C_0+D_0t,$$

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l},\quad n=1,2,\cdots.$$

所以

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(t)T_n(t)\\&=(a_0+b_0t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}\right.\\&\quad\left.+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{n\pi}{l}x,\end{aligned}\tag{11.12}$$

其中 $a_n=C_nA_n$, $b_n=D_nA_n$, $n=0,1,2,\cdots$.

由初始条件得

$$\varphi(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\psi(x)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

由此得

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\qquad n=1,2,\cdots,$$

$$b_0=\frac{1}{l}\int_0^l\psi(x)\mathrm{d}x,$$

$$b_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\qquad n=1,2,\cdots.$$

将 a_0,b_0,a_n,b_n 代入(11.12)即得此定解问题的解.

3. 一端边界条件为第一类,另一端边界条件为第二类

当 $u(0,t)=0,u_x(l,t)=0$ 时,设 $u(x,t)=X(x)T(t)$,代入方程及边界条件中得固有值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X(0)=0,\ X'(l)=0\end{cases}.$$

易知仅当 $\lambda>0$ 时,才有非零解,且

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

由 $X(0)=0$ 得 $A=0$,于是 $X(x)=B\sin\sqrt{\lambda}x$. 再由 $X'(l)=0$ 得

$$\sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}l=0.$$

由于 $\sqrt{\lambda}B\neq0$,故有

$$\cos\sqrt{\lambda}l=0.$$

由此可得

$$\sqrt{\lambda}=\frac{n\pi-\frac{\pi}{2}}{l},\quad n=1,2,\cdots,$$

因此固有值为

$$\lambda_n=\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2,\quad n=1,2,\cdots.$$

固有函数系为

$$\left\{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right\},\text{记为}\{\beta_n(x)\},\ n=1,2,\cdots.$$

不难求得

$$\begin{aligned}\langle\beta_n,\beta_m\rangle&=\int_0^l\beta_n(x)\beta_m(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^l\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2l}\mathrm{d}x\\&=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{l}{2} & m=n\end{cases}.\end{aligned}$$

当 $u_x(0,t)=0,u(l,t)=0$ 时,可得固有值为

$$\lambda_n=\left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2,\quad n=1,2,\cdots,$$

固有函数系

$$\{\beta_n(x)\}=\left\{\cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right\},\ n=1,2,\cdots.$$

同样容易求得

$$\|\beta_n\|^2=\langle\beta_n,\beta_n\rangle=\frac{l}{2}.$$

4. 有一端的边界条件是第三类

例 11.5　设长为 l 的均匀细杆侧面绝热,内部无热源,$x=0$ 端的温度保持为 0°,$x=l$ 端在温度为 0°的介质中自由冷却. 已知初始温度为 $\varphi(x)$,求杆的温度变化规律.

解　定解问题为

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0\\ u|_{x=0}=0,\ (u_x+hu)|_{x=l}=0, & h>0\ .\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$$

设解 $u(x,t)=X(x)T(t)$,代入方程及边界条件中,得

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

及固有值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\X(0)=0,\ X'(l)+hX(l)=0\end{cases}$$

经过讨论知，$\lambda\leqslant 0$ 不是固有值．当 $\lambda>0$ 时，

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

由 $X(0)=0$ 得 $A=0$，故 $X(x)=B\sin\sqrt{\lambda}x$．由 $X'(l)+hX(l)=0$ 得

$$B(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l+h\sin\sqrt{\lambda}l)=0.$$

由于 $B\neq 0$，所以得到关于 λ 的方程

$$-\frac{\sqrt{\lambda}}{h}=\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l,$$

若记 $\sqrt{\lambda}l=\nu$，则方程为

$$\operatorname{tg}\nu=-\frac{1}{lh}\nu,\quad(\nu>0).$$

用图解法解此超越方程得可数多个解 ν_n，且当 $n\to\infty$ 时，$\nu_n\to+\infty$（见图 11-2）．于是得可数多个固有值

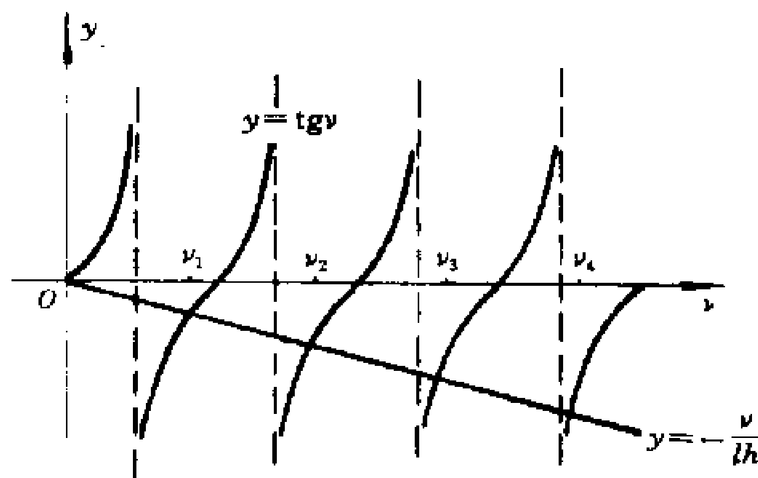


图 11-2

$$\lambda_n = \left(\frac{\nu_n}{l}\right)^2, \quad n = 1,2,\cdots,$$

及固有函数系

$$\{\beta_n(x)\} = \{\sin \frac{\nu_n}{l} x\}.$$

利用等式

$$\mathrm{tg}\nu_n = -\frac{\nu_n}{lh}$$

即

$$\nu_n \cos\nu_n = -lh\sin\nu_n$$

不难求得

$$\langle \beta_n, \beta_m \rangle = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2}\left[l + \frac{h}{h^2 + (\nu_n/l)^2}\right] & m = n \end{cases}.$$

解关于$T(t)$的方程得

$$T_n(t) = C_n e^{-(\nu_n a/l)^2 t}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

由叠加原理得

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\nu_n a/l)^2 t} \sin \frac{\nu_n}{l} x, \tag{11.13}$$

其中 $a_n = C_n B_n$，$n = 1,2,\cdots$.

由初始条件，有

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\nu_n}{l} x,$$

故

$$a_n = \frac{1}{\langle \beta_n, \beta_n \rangle} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\nu_n}{l} x \mathrm{d}x.$$

将 a_n 代入(11.13)式就得定解问题的级数解.

若边界条件为

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad (u_x + hu)|_{x=l} = 0, \quad h > 0,$$

则固有值问题为

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=0,\ X'(l)+hX(l)=0 \end{cases}.$$

仅当 $\lambda>0$ 时，它才有非零解

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

由 $X'(0)=0$ 得 $B=0$，于是 $X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x$.

又由 $X'(l)+hX(l)=0$ 得

$$A(-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l+h\cos\sqrt{\lambda}l)=0.$$

因为 $A\neq0$，故

$$\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l=h\cos\sqrt{\lambda}l.$$

记 $\sqrt{\lambda}l=\nu$ ($\nu>0$)，得

$$\mathrm{tg}\nu=\frac{lh}{\nu}.$$

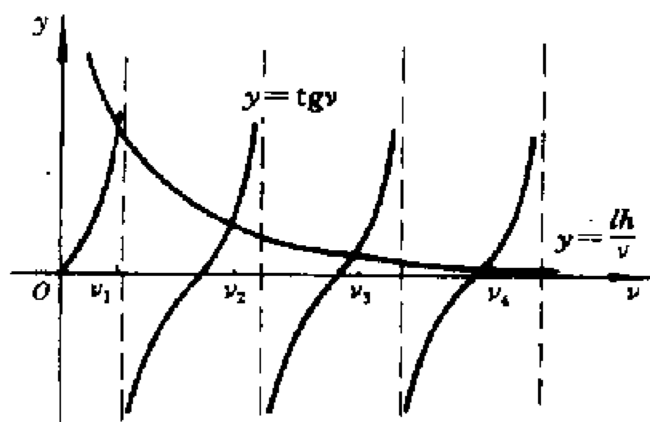


图 11-3

用图解法可求得此方程的可数多个解(见图 11-3)

$$\nu_1,\nu_2,\nu_3,\cdots,\nu_n,\cdots.$$

因此固有值为

$$\lambda_n=\left(\frac{\nu_n}{l}\right)^2,\ n\in N.$$

固有函数系为

$$\{\beta_n(x)\}=\{\cos\frac{\nu_n}{l}x\},$$

且

$$\langle\beta_n,\beta_m\rangle=\begin{cases}0 & m\neq n \\ \frac{1}{2}\left[l+\frac{h}{h^2+(\nu_n/l)^2}\right] & m=n\end{cases}.$$

§11.2 非齐次方程及非齐次边界条件的处理

一、固有函数法

对于非齐次方程、齐次边界条件的混合问题可用固有函数法求解．

设有定解问题

$$
(\text{Ⅱ})\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<l,\ t>0\\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}.
$$

由于(Ⅱ)中方程是非齐次的，当设 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 时，并不能将它化为两个独立的常微分方程，因此不能象齐次方程那样进行变量分离．但分离变量法实质上是将解 $u(x,t)$ 展为关于固有函数系$\{\beta_n(x)\}$的以 t 为参量的 Fourier 级数

$$
u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\beta_n(x).
$$

其中 $T_n(t)$是由方程分离出来的关于 $T(t)$的常微分方程和初始条件确定的．问题(Ⅱ)与问题(Ⅰ)的唯一差别是自由项不恒为零．已知(Ⅰ)的固有函数系为$\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$，我们设想问题(Ⅱ)的解也有如下形式

$$
u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{11.14}
$$

其中 $T_n(t)$为待定函数，则显然 $u(x,t)$满足齐次边界条件．将 $u(x,t)$代入方程及初始条件中，若能确定 $T_n(t)$，则 $u(x,t)$就是定解问题(Ⅱ)的解．

将 $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ 代入方程，经整理得

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=f(x,t).
$$

由于左端是关于 $\{\sin \frac{n\pi}{l}x\}$ 的 Fourier 级数，为确定它的系数，也应将右端的 $f(x,t)$展为关于 $\{\sin \frac{n\pi}{l}x\}$ 的 Fourier 级数：

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

若记 $f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

比较 $\sin\frac{n\pi}{l}x$ 的系数得

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), \quad n = 1,2,\cdots.$$

由初始条件，有

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

这表明 $T_n(0)$和 $T_n'(0)$分别是 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$关于 $\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$ 的 Fourier 系数，即

$$T_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{记为}} \varphi_n.$$

$$T_n'(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{记为}} \psi_n.$$

于是得到关于 $T_n(t)$的常微分方程的初始值问题

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n,\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

用参数变易法或 Laplace 变换法（当 $f_n(t)$为某些函数类时，可用待定系数法）求得此初值问题的解为

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau$$
$$+\varphi_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+\frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi a}{l}t,\quad n=1,2,\cdots.$$

将其代入(11.14)式，即得所求的解．

关于参数变易法请参阅[11]的§12.7；Laplace 变换法将在本书的下一章介绍．

上述利用对应的齐次方程及齐次边界条件的固有函数系，求解非齐次方程、齐次边界条件定解问题的方法叫做**固有函数法**．

例 11.6　解定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+x(2l-x), & 0<x<l,\ t>0\\ u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0\end{cases}.$$

解　由
$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}\\ u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0\end{cases}$$
得固定函数系为

$$\left\{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right\},\ n=1,2,,\cdots,$$

故设定解问题的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x.$$

代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n''(t)+\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2}{4l^2}T_n(t)]\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x$$
$$=x(2l-x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x,$$

其中

$$f_n=\frac{2}{l}\int_0^l(2lx-x^2)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{32l^2}{(2n-1)^3\pi^3}.$$

比较系数得

$$T_n''(t)+\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2}{4l^2}T_n(t)=\frac{32l^2}{(2n-1)^3\pi^3},\quad n=1,2,\cdots.$$

对应的齐次方程的通解为

$$\overline{T}_n(t)=A_n\cos\frac{(2n-1)\pi a}{2l}t+B_n\sin\frac{(2n-1)\pi a}{2l}t,\quad n=1,2,\cdots.$$

由于 f_n 是常数，故设其特解为

$$T_n^*(t)=C_n,$$

代入方程解得

$$T_n^*(t)=C_n=\frac{128l^4}{(2n-1)^5\pi^5a^2},\quad n=1,2,\cdots.$$

所以

$$\begin{aligned}T_n(t)&=\overline{T}_n(t)+T_n^*(t)\\&=A_n\cos\frac{(2n-1)\pi a}{2l}t+B_n\sin\frac{(2n-1)\pi a}{2l}t+\frac{128l^4}{(2n-1)^5\pi^5a^2}.\end{aligned}$$

由初始条件得

$$T_n(0)=0,\quad T_n'(0)=0,$$

故有

$$\begin{cases}A_n-\dfrac{128l^4}{(2n-1)^5\pi^5a^2}=0\\ \dfrac{(2n-1)\pi a}{2l}B_n=0\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots.$$

由此定出

$$A_n=-\frac{128l^4}{(2n-1)^5\pi^5a^2},\quad B_n=0,$$

因此

$$T_n(t)=\frac{128l^4}{\pi^5a^2(2n-1)^5}\left(1-\cos\frac{(2n-1)\pi a}{2l}t\right),\quad n=1,2,\cdots.$$

最后得到此定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{128l^4}{\pi^5a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^5}\left(1-\cos\frac{(2n-1)\pi a}{2l}t\right)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x.$$

例 11.7　求内部热源强度为 $A\sin\omega t$，两端绝热，初始温度为零的细长杆上温度分布规律．

解　定解问题为

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + A\sin\omega t, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}.$$

由

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

得固有函数系

$$\left\{\cos\frac{n\pi x}{l}\right\} \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

设解

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

将其代入方程得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)\right]\cos\frac{n\pi}{l}x = A\sin\omega t.$$

由于 $A\sin\omega t$ 与 x 无关，故它关于 $\{\cos\frac{n\pi}{l}x\}$ 的 Fourier 系数为

$a_0 = A\sin\omega t$，$a_n = 0, n = 1,2,\cdots$.

于是得

$$T_0'(t) = A\sin\omega t,$$

$$T_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad n = 1,2,\cdots.$$

解之得

$$T_0(t) = -\frac{A}{\omega}\cos\omega t + C, \quad T_n(t) = D_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t},\ n = 1,2,\cdots.$$

由初始条件得

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cos\frac{n\pi x}{l} = 0.$$

故 $T_n(0)=0, n=0,1,2,\cdots$. 由此定出 $C=\frac{A}{\omega}, D_n=0, n=1,2,\cdots$，于是

$$T_0(t) = \frac{A}{\omega}(1-\cos\omega t),\quad T_n(t)=0,\ n=1,2,\cdots.$$

所以

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x = \frac{A}{\omega}(1-\cos\omega t).$$

二、非齐次边界条件的齐次化

前面介绍的解法，只适用于带齐次边界条件的定解问题．对于带非齐次边界条件的定解问题要想使用这些方法，就必须将边界条件"齐次化"．

考虑定解问题

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0 & (11.15)\\ u|_{x=0} = \mu_1(t),\ u|_{x=l} = \mu_2(t) & (11.16)\\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x) & (11.17)\end{cases}$$

由于方程和定解条件都是线性的，故可利用叠加原理，设

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t).$$

通过适当选取待定函数 $w(x,t)$，可使关于 $v(x,t)$ 的边界条件是齐次的，即

$$v|_{x=0} = 0,\quad v|_{x=l} = 0.$$

由于 $v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$，因此只需

$$w|_{x=0} = \mu_1(t),\quad w|_{x=l} = \mu_2(t). \tag{11.18}$$

满足条件(11.18)的 $w(x,t)$ 显然存在且有无穷多个．我们可以选取其中最简单的形式

$$w(x,t) = A(t)x + B(t),$$

其中 $A(t)$，$B(t)$ 待定．由条件(11.18)，有

$$\begin{cases} B(t) = \mu_1(t) \\ A(t)l + B(t) = \mu_2(t) \end{cases}.$$

于是得

$$A(t) = \frac{1}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)], \quad B(t) = \mu_1(t),$$

从而

$$w(x,t) = \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] + \mu_1(t).$$

即只需作变换

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] + \mu_1(t),$$

定解问题(Ⅲ)就化为关于 $v(x,t)$ 的带齐次边界条件的定解问题

$$(\text{Ⅲ}') \begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f_1(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0 \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 \\ v|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi_1(x) \end{cases},$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(x,t) &= f(x,t) + a^2 w_{xx} - w_{tt} \\ &= f(x,t) - \left[\frac{\mu_2''(t) - \mu_1''(t)}{l}x + \mu_1''(t)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \varphi(x) - w(x,0) \\ &= \varphi(x) - \left[\frac{\mu_2(0) - \mu_1(0)}{l}x - \mu_1(0)\right], \end{aligned}$$

$$\psi_1(x) = \psi(x) - \left[\frac{\mu_2'(0) - \mu_1'(0)}{l}x + \mu_1'(0)\right].$$

可用固有函数法求解定解问题(Ⅲ′).

当边界条件不都是第一类时,这种方法也是适用的,只不过辅助函数 $w(x,t)$ 的形式不同而已. 这里给出常见的几种非齐次边界条件下的 $w(x,t)$,请读者自行验证.

(1) 对于 $u|_{x=0} = \mu_1(t)$, $u_x|_{x=l} = \nu_2(t)$,可选

$$w(x,t) = \nu_2(t)x + \mu_1(t);$$

(2) 对于 $u_x|_{x=0} = \nu_1(t)$, $u|_{x=l} = \mu_2(t)$, 可选

$$w(x,t) = \nu_1(t)x + \mu_2(t) - \nu_1(t)l;$$

(3) 对于 $u_x|_{x=0} = \nu_1(t)$, $u_x|_{x=l} = \nu_2(t)$, 可选

$$w(x,t) = \frac{x^2}{2l}[\nu_2(t) - \nu_1(t)] + \nu_1(t)x.$$

例 11.8 解定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u_x|_{x=0} = t,\ u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}.$$

解 设 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$. 由于左端点的边界条件为第二类,右端的边界条件是第一类的,故选取

$$w(x,t) = xt - lt.$$

因为 $w_t=x-l$, $w_{xx}=0$, 所以 $v(x,t)$满足

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} - (x - l), & 0 < x < l,\ t > 0 \\ v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 \\ v|_{t=0} = 0 \end{cases}.$$

由 § 11.1 知,固有函数系为 $\{\cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\}$, $n=1,2,\cdots$. 故设

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x.$$

代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t) + \frac{(2n-1)^2\pi^2a^2}{4l^2}T_n(t)\right]\cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x,$$

其中

$$f_n=\frac{2}{l}\int_0^l (l-x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\mathrm{d}x=\frac{8l}{(2n-1)^2\pi^2},\quad n=1,2,\cdots.$$

由此及初始条件得

$$\begin{cases}T_n'(t)+\dfrac{(2n-1)^2\pi^2a^2}{4l^2}T_n(t)=\dfrac{8l}{(2n-1)^2\pi^2} \\ T_n(0)=0\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots.$$

解之得

$$T_n(t)=\frac{32l^2}{\pi^4a^2(2n-1)^4}[1-\mathrm{e}^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}],$$

故

$$v(x,t)=\frac{32l^2}{\pi^4a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}[1-\mathrm{e}^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}]\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$$

原定解问题的解为

$$u(x,t)=(x-l)t+\frac{32l^2}{\pi^4a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}[1-\mathrm{e}^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}]\cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x.$$

当非齐次方程的自由项和边界条件都与时间 t 无关时，称为稳定的非齐次问题．在这种情况下，辅助函数也可选择成与 t 无关，并且能同时使方程也齐次化．

例 11.9 求解定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x), & 0<x<l,\ t>0 \\ u|_{x=0}=A,\ u|_{x=l}=B \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}.$$

解 这是稳定非齐次问题，设解为

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x).$$

代入方程得

$$u_{tt}=a^2v_{xx}+[f(x)+a^2w''(x)].$$

选取 $w(x)$，使其满足

$$\begin{cases} a^2 w''(x) = -f(x) \\ w(0) = A,\ w(l) = B \end{cases}.$$

相应地，$v(x,t)$满足

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \\ v|_{x=0} = 0,\ v|_{x=l} = 0 \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - w(x),\quad v_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}.$$

由这两个定解问题可求得 $w(x)$及 $v(x,t)$，这就求出了原定解问题的解．

比如，$f(x) = \cos\dfrac{2\pi x}{l}$，$\varphi(x) = \dfrac{B-A}{l}x + A - \dfrac{l^2}{4\pi^2 a^2}$，$\psi(x) = 0$ $(0 < x < l)$. 可求得

$$w(x) = \frac{l^2}{4\pi^2 a^2}\cos\frac{2\pi x}{l} + \frac{B-A}{l}x + A - \frac{l^2}{4\pi^2 a^2}.$$

由分离变量法求得

$$v(x,t) = -\frac{l^2}{\pi^3 a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{4k^2-4k-3}\cos\frac{(2k-1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x.$$

故

$$u(x,t) = \frac{l^2}{4\pi^2 a^2}\cos\frac{2\pi x}{l} + \frac{B-A}{l}x + A - \frac{l^2}{4\pi^2 a^2} + \frac{l^2}{\pi^3 a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{4k^2-4k-3}\cos\frac{(2k-1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x.$$

§11.3 某些区域上二维 Laplace 方程的分离变量解法

分离变量法不仅可以解波动方程和热传导方程的混合问题，而且可以求解某些区域上 Laplace 方程和 Poisson 方程的边值问题．

一、矩形域上 Laplace 方程的边值问题

设有长为 a 宽为 b 的矩形薄板(如图 11-4),两侧面绝热,有三边的温度为零,另一边的温度分布为 $f(x)$,内部没有热源. 求稳定状态时板内的温度分布.

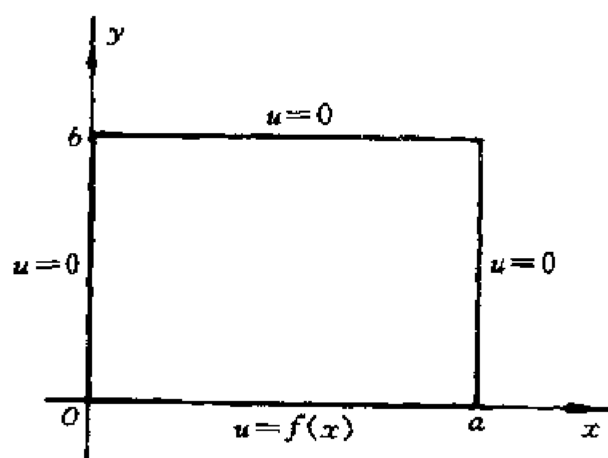


图 11-4

此热传导过程的定解问题为

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=a} = 0, & 0 < y < b \\ u|_{y=0} = f(x),\ u|_{y=b} = 0, & 0 < x < a \end{cases}$$

因为有一组边界条件是齐次的,故可以使用分离变量法求解. 设解 $u(x,y)=X(x)Y(y)$,代入方程得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

即

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

利用齐次边界条件得固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(a) = 0 \end{cases}.$$

易知固有值为 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, $n=1,2,\cdots$,固有函数为

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1,2,\cdots,$$

而

$$Y_n(y) = C_n e^{n\pi y/a} + D_n e^{-n\pi y/a}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

由叠加原理得级数解

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n e^{n\pi y/a}+b_n e^{-n\pi y/a})\sin\frac{n\pi}{a}x,$$

其中　　$a_n=C_nB_n,\ b_n=D_nB_n,\ n=1,2,\cdots.$

由另一组边界条件可得

$$\begin{cases}a_n+b_n=f_n=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x \\ e^{n\pi b/a}a_n+e^{-n\pi b/a}b_n=0\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

解之得

$$a_n=\frac{-f_n\cdot e^{-n\pi b/a}}{e^{n\pi b/a}-e^{-n\pi b/a}},\quad b_n=\frac{f_n\cdot e^{n\pi b/a}}{e^{n\pi b/a}-e^{-n\pi b/a}},\quad n=1,2,\cdots.$$

故温度分布为

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f_n}{e^{n\pi b/a}-e^{-n\pi b/a}}[e^{n\pi(y-b)/a}-e^{-n\pi(y-b)/a}]\sin\frac{n\pi}{a}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f_n}{\mathrm{sh}(n\pi b/a)}\mathrm{sh}\frac{n\pi(y-b)}{a}\sin\frac{n\pi}{a}x.\end{aligned}$$

固有函数法对带有一组齐次边界条件的 Poisson 方程定解问题也是适用的.

例 11.10　求解定解问题

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=-2,\ 0<x<1,\ 0<y<1\\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=0\\ u|_{y=0}=0,\ u|_{y=1}=0\end{cases}.$$

解　由

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0\\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=0\end{cases}$$

得固有函数系 $\{\sin n\pi x\}, n=1,2,\cdots$. 设定解问题的解为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(y)\sin n\pi x,$$

代入 Poisson 方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}[-n^2\pi^2Y_n(y)+Y_n''(y)]\sin n\pi x=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\cdot\sin n\pi x,$$

其中

$$f_n=2\int_0^1(-2)\sin n\pi x\mathrm{d}x=\frac{4}{n\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{-8}{(2k-1)\pi} & n=2k-1\end{cases}\quad(k\in N).$$

于是有

$$Y_n''(y)-n^2\pi^2Y_n(y)=\frac{4}{n\pi}[(-1)^n-1],$$

由另一组边界条件得

$$Y_n(0)=Y_n(1)=0,\ n=1,2,\cdots.$$

解之得

$$Y_{2k}(y)=0,$$

$$Y_{2k-1}(y)=\frac{4}{\pi^3(2k-1)^3\mathrm{sh}(2k\pi-\pi)}[(\mathrm{e}^{-(2k-1)\pi}-1)\mathrm{e}^{(2k-1)\pi y}$$

$$+(1-\mathrm{e}^{(2k-1)\pi})\mathrm{e}^{-(2k-1)\pi y}]+\frac{8}{(2k-1)^3\pi^3},$$

$$k=1,2,\cdots.$$

所以

$$u(x,y)=\frac{4}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\left[\frac{\mathrm{e}^{-(2k-1)\pi}-1}{\mathrm{sh}(2k\pi-\pi)}\mathrm{e}^{(2k-1)\pi y}\right.$$

$$\left.+\frac{1-\mathrm{e}^{(2k-1)\pi}}{\mathrm{sh}(2k\pi-\pi)}\mathrm{e}^{-(2k-1)\pi y}+2\right]\sin(2k-1)\pi x.$$

如果两组边界条件没有一组是齐次的，则象处理非齐次边界条件的混合问题那样，也可用引入辅助函数的方法将其中一组边界条件齐次化．另一种方法是，将这样的定解问题分成只带一组非齐次边界条件，而另一组为齐次边界条件的两个定解问题分别求解，再利用叠加原理，将这些解相加便得到原定解问题的解．关

于后一种方法读者可参阅[26].

二、圆域上 Laplace 方程的边值问题

设有半径为 a 的圆形薄板，表面绝热，圆周上温度分布为 $f_1(x,y)$，内部无热源，则圆板上稳恒状态的温度分布用定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x^2+y^2<a^2 \\ u|_{x^2+y^2=a^2}=f_1(x,y) \end{cases}$$

描述.

为便于使用分离变量法，我们采用极坐标系，于是上述问题化为

$$\text{(IV)}\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0, & \rho<a,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ u|_{\rho=a}=f(\theta) \end{cases},$$

其中

$$f(\theta)=f_1(a\cos\theta,a\sin\theta).$$

设解　$u(\rho,\theta)=R(\rho)\Phi(\theta)$，代入方程得

$$\frac{\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=-\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=\lambda,$$

即

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)R(\rho)-\lambda R(\rho)=0,$$
$$\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0.$$

这里缺少确定固有值和固有函数的第一、二、三类齐次边界条件，但根据问题的性质有下面的条件：由于(ρ,θ)与$(\rho,\theta+2\pi)$表示同一点，故应有 $u(\rho,\theta)=u(\rho,\theta+2\pi)$，称之为**周期性边界条件**，由此可得 $\Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)$；[illegible]在圆板的中心 $\rho=0$ 处，温度应该是有限的，因此有 $|u(0,\theta)|$[illegible]称之为**有界性条件**，由此知 $\lim\limits_{\rho\to 0}R(\rho)<+\infty$. 这两种边界条件[illegible]题的实际意义自然决定的，故称为**自然边界条件**.

由周期条件可得固有值问题

$$\begin{cases}\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0\\ \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)\end{cases}$$

仅当 $\lambda\geqslant 0$ 时,上述方程才可能有非零解

$$\Phi(\theta)=A\cos\sqrt{\lambda}\,\theta+B\sin\sqrt{\lambda}\,\theta.$$

由条件 $\Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)$ 可得固有值

$$\lambda_n=n^2,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

及固有函数

$$\Phi_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

关于 $R(\rho)$ 的方程为

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-n^2R(\rho)=0,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

这是齐次 Euler 方程,其通解为

$$R_0(\rho)=C_0+D_0\ln\rho.$$

$$R_n(\rho)=C_n\rho^n+D_n\rho^{-n},\quad n=1,2,\cdots.$$

利用有界性条件 $\lim\limits_{\rho\to 0}R(\rho)<+\infty$,应取 $D_0=D_n=0$,所以

$$R_n(\rho)=C_n\rho^n,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

故

$$u(\rho,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),\qquad(11.18)$$

其中 $a_0=C_0A_0$, $a_n=C_nA_n$, $b_n=C_nB_n$, $n=1,2,\cdots$.

由非齐次边界条件 $u|_{\rho=a}=f(\theta)$ 得

$$f(\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$$

由此可定出解中的系数为

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta,\qquad n=1,2,\cdots.$$

将它们代入(11.18)即得定解问题(Ⅳ)的解.

圆域上 poisson 方程的边值问题也可用固有函数法求解.

例 11.11 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -2xy, & x^2 + y^2 < a^2 \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = 0 \end{cases}.$$

解 由于是圆域上的问题,故采用极坐标系,则定解问题化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\rho^2 \sin 2\theta, & 0 < r < a,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ u|_{\rho=a} = 0 \end{cases}.$$

由上面的讨论知,固有函数为

$$A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

因此设定解问题的解为

$$u(\rho,\theta) = R_0(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} [R_n(\rho)\cos n\theta + S_n(\rho)\sin n\theta].$$

将其代入方程及边界条件并考虑有界性边界条件就得到下面四个常微分方程的定解问题.

$$\begin{cases} R_0''(\rho) + \dfrac{1}{\rho} R_0'(\rho) = 0 \\ R_0(a) = 0,\ \lim\limits_{\rho\to 0} R_0(\rho) < -\infty \end{cases},$$

$$\begin{cases} R_n''(\rho) + \dfrac{1}{\rho} R_n'(\rho) - \dfrac{n^2}{\rho^2} R_n(\rho) = 0 \\ R_n(a) = 0,\ \lim\limits_{\rho\to 0} R_n(\rho) < +\infty \end{cases} \quad n = 1,2,\cdots,$$

$$\begin{cases} S_n''(\rho) + \dfrac{1}{\rho} S_n'(\rho) - \dfrac{n^2}{\rho^2} S_n(\rho) = 0 \\ S_n(a) = 0,\ \lim\limits_{\rho\to 0} S_n(\rho) < +\infty \end{cases} \quad n = 1,3,4\cdots,$$

$$\begin{cases} S_2''(\rho) + \dfrac{1}{\rho} S_2'(\rho) - \dfrac{4}{\rho^2} S_2(\rho) = -\rho^2 \\ S_2(a) = 0,\ \lim\limits_{\rho\to 0} S_2(\rho) < +\infty \end{cases}.$$

它们的解分别为

$$R_0(\rho) = 0,$$

$$R_n(\rho) = 0 \quad (n = 1,2,\cdots),$$

$$S_n(\rho) = 0 \quad (n = 1,3,4,\cdots),$$

$$S_2(\rho) = \frac{1}{12}(a^2\rho^2 - \rho^4).$$

所以

$$u(\rho,\theta) = \frac{\rho^2}{12}(a^2 - \rho^2)\sin 2\theta,$$

即

$$u(x,y) = \frac{xy}{6}(a^2 - x^2 - y^2).$$

§ 11.4 特殊函数在分离变量法中的应用

用分离变量法求解某些定解问题时，会出现一些特殊的固有值问题，其解是特殊函数，例如 Legendre 函数、Bessel 函数等．本节将介绍 Legendre 多项式和第一类 Bessel 函数在分离变量法中的应用，并将给出一般固有值问题的一些重要结论．

一、Legendre 多项式的应用

考虑球域上稳定温度场问题．设球面温度分布为 $f(\theta)$（θ 的意义见图 11-5），求稳定状态下球内的温度分布 u．

u 应满足定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{r=a} = f(\theta) \end{cases}$$

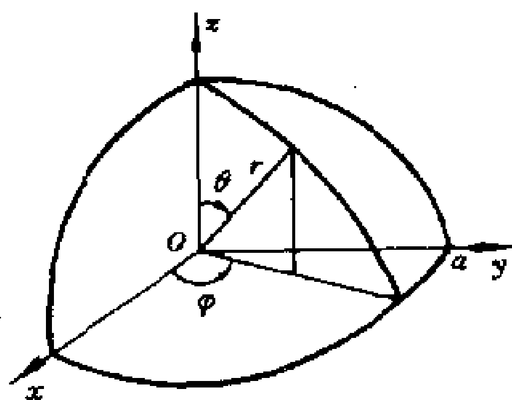


图 11-5

引入球坐标

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases},$$

则 $\quad \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$

由于方程的自由项及边界条件中的已知函数都与 φ 无关，故 u 只是 r,θ 的函数 $u(r,\theta)$，从而 $\frac{\partial u}{\partial\theta}=0$. 于是定解问题化为

$$(\text{V})\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) = 0 \\ \qquad\qquad 0<r<a, 0<\theta<\pi \\ u|_{r=a} = f(\theta), \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi \end{cases}$$

下面用分离变量法求(V)的解. 设 $u(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$，代入方程得

$$\frac{r^2R''(r)+2rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\theta)+\mathrm{ctg}\theta\Phi'(\theta)}{\Phi(\theta)}=\lambda,$$

即

$$r^2R''(r)+2rR'(r)-\lambda R(r)=0,$$

$$\Phi''(\theta)+\mathrm{ctg}\theta\Phi'(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0.$$

实数 λ 总可写为 $\lambda=l(l+1)$ 的形式，又令 $x=\cos\theta$，并将 $\Phi(\theta)$ 改写为 $y(x)$，则后一方程化为

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + l(l+1)y = 0.$$

这个二阶线性变系数常微分方程称为 l 阶 Legendre 方程. 对其采用幂级数解法. 设解为

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

代入方程得恒等式，比较等式两边 x^k 的系数得

$$c_{k+2}=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k, \quad k=0,1,2,\cdots.$$

故

$$c_{2k}=(-1)^k\cdot\frac{l(l-2)(l-4)\cdots(l-2k+2)(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{(2k)!}c_0,$$

$$c_{2k+1}=(-1)^k\cdot\frac{(l-1)(l-3)\cdots(l-2k+1)(l+2)(l+4)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!}c_1,$$

$k=1,2,\cdots,c_0,c_1$ 为任意常数.

于是

$$y=c_0y_0(x)+c_1y_1(x),$$

其中

$$y_0(x)=1-\frac{l(l+1)}{2!}x^2+\frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{4!}x^4-\cdots+(-1)^k\frac{l(l-2)\cdots(l-2k+2)(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}+\cdots,$$

$$y_1(x)=x-\frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3+\frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!}x^5-\cdots+(-1)^k\frac{(l-1)(l-3)\cdots(l-2k+1)(l+2)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}+\cdots.$$

容易知道,这两个幂级数的收敛半径都是 1,而当 $x=\pm1$ 时,由 Gauss 判别法可知,它们都是发散的,且可证明在$[-1,1]$上都是无界的. 显然 $y_0(x)$与 $y_1(x)$是线性无关的,且都是 Legendre 方程的解,故

$$y=c_0y_0(x)+c_1y_1(x)$$

是 Legendre 方程在$(-1,1)$内的通解.

由以上解的表达式可知,当 l 为整数时,$y_0(x)$与 $y_1(x)$之一即退化为多项式.(由于 $l=-N$ 为负整数时,$l(l+1)=(N-1)N$,故只需讨论 l 为非负整数的情况.)令 $l=n$ 是非负整数,易知当 n

为偶数时，$y_0(x)$是 n 次多项式．当 n 为奇数时，$y_1(x)$是 n 次多项式．将 y_0 和 y_1 乘以适当因子后记该多项式为 $p_n(x)$则

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

这就是 n 阶 Legendre 多项式，也称做第一类 Legendre 函数．注意，此时另一个仍为无穷级数，记作 $q_n(x)$，称为第二类 Legendre 函数．于是当 l 为非负整数时，Legendre 方程的通解为

$$y(x) = c_0 p_n(x) + c_1 q_n(x).$$

由于定解问题(V)的解 $u(r,\theta)$当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时是有界的．即 $\Phi(\theta)$当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时有界，亦即 $y(x)$在$[-1,1]$上有界，故应取 l 为非负整数 n. 即固有值问题

$$\begin{cases}\Phi''(\theta)+\mathrm{ctg}\theta\Phi'(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0\\ \Phi(\theta)\text{有界}, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi\end{cases}$$

当 $\lambda=n(n+1)$时有非零解

$$\Phi_n(\theta) = p_n(\cos\theta), \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

此时，关于 $R(r)$的方程为

$$r^2R''(r)+2rR'(r)-n(n+1)R(r)=0,$$

其通解为

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

由解的有界性，应取 $D_n=0$，故

$$R_n(r) = C_n r^n, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

利用叠加原理，得定解问题(V)的解

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n p_n(\cos\theta).$$

由非齐次边界条件得

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n a^n p_n(\cos\theta).$$

为求 C_n 方便计，仍令 $x=\cos\theta, x\in[-1,1]$，记 $f(\theta)=F(x)$，则

$$C_n=\frac{1}{a^n}\frac{1}{\|\mathrm{p}_n\|^2}\int_{-1}^{1}F(x)\mathrm{p}_n(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2n+1}{2a^n}\int_{-1}^{1}F(x)\mathrm{p}_n(x)\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

例如　$f(\theta)=\cos^2\theta$,即 $F(x)=x^2$,则

$$C_n=\frac{2n+1}{2a^n}\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{p}_n(x)\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

因为 n 为奇数时 $\mathrm{p}_n(x)$ 是奇函数,故 $C_n=0$. 当 n 为偶数时

$$C_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$
$$C_2=\frac{5}{2a^2}\int_{-1}^{1}x^2\,\frac{1}{2}(3x^2-1)\mathrm{d}x=\frac{2}{3a^2}.$$

对于 $n>2$,利用 $\mathrm{p}_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}$,由分部积分可得

$$C_n=0,\quad n=4,6,8,\cdots.$$

所以解为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3a^2}r^2\mathrm{p}_2(\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{a^2}(\cos^2\theta-\frac{1}{3})r^2.$$

实事上,此时不必做积分即可定出系数 C_n.因为 $x^2=\frac{1}{3}\mathrm{p}_0(x)+\frac{2}{3}\mathrm{p}_2(x)$,故比较

$$x^2=\frac{1}{3}\mathrm{p}_0(x)+\frac{2}{3}\mathrm{p}_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n a^n\mathrm{p}_n(x)$$

两边 $\mathrm{p}_n(x)$ 的系数,立即可得

$$C_0=\frac{1}{3},\ C_2=\frac{2}{3a^2},\text{其余 } C_n=0.$$

二、Sturm-Liouville 方程的固有值问题

由前面的讨论可以看出,用分离变量法求解定解问题时,关键是求解一个常微分方程在齐次边界条件或自然边界条件下的固有

值问题.用分离变量法所得到的解,其实就是将所求解 u 按固有函数系 $\{\beta_n(x)\}$ 作广义 Fourier 展开. 为使广义 Fourier 级数收敛于函数 u,要求 $\{\beta_n(x)\}$ 是 $L^2[a,b]$ 上的完全正交系,为此我们给出二阶线性常微分方程固有值的一般理论.

任一个二阶线性常微分方程,乘以适当的函数后总可以化为下面的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0,\quad a<x<b. \qquad (11.19)$$

通常称这个常微分方程为 **Sturm-Liouville** 方程. 前面用分离变量法得到的固有值问题中的常微分方程就是它的特例. 例如取 $k(x)=1-x^2, q(x)=0, \rho(x)=1$ 就是 Legendre 方程.

因为固有值问题的边界条件可以是第一、二、三类齐次边界条件及自然边界条件,因此 Sturm-Liouville 方程固有值问题的提法是

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0,\quad a<x<b,\\ \text{在 } x=a \text{ 及 } x=b \text{ 处的第一或第二或第三}\\ \qquad\text{类齐次边界条件或自然边界条件}.\end{cases} \qquad (11.20)$$

对方程(11.19)中的系数作以下假定:

$k\in C^1[a,b], k(x)\geqslant 0$, 当 $x\in(a,b)$ 时 $k(x)>0$;

$q\in C[a,b]$ 或 $q\in C(a,b)$ 且在 $x=a, x=b$ 处有一级极点(即无穷型间断点),当 $x\in(a,b)$ 时,$q(x)\geqslant 0$;

$\rho\in C[a,b], \rho(x)\geqslant\rho_0>0$ (ρ_0 为常数)或当 $x\in(a,b)$ 时,$\rho(x)>0$ 且在区间端点处有一级极点.

固有值问题(11.20)的主要结论称为 Strum Liouville 理论,现叙述如下,证明从略.

1. 存在可数多个实的固有值

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$$

及对应的固有函数系 $\{y_n(x)\}, n=1,2,\cdots$.

2. 所有固有值都非负，即 $\lambda_n \geqslant 0, n \in N$.

3. 固有函数系 $\{y_n\}$ 是 $L_\rho^2[a,b]$ 中关于权函数 $\rho(x)$ 的完全正交系，即

$$\int_a^b \rho(x) y_m(x) y_n(x) \mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n),$$

且对任意 $f \in L^2[a,b]$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, \frac{y_n}{\| y_n \|^2} \rangle \right|^2 = \| f \|^2 \left(= \int_a^b \rho(x) f^2(x) \mathrm{d}x \right).$$

4. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的一阶导数及分段连续的二阶导数且满足(11.20)的边界条件，则 $f(x)$ 关于 $\{y_n\}$ 的广义 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = \frac{\int_a^b \rho(x) f(x) y_n(x) \mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x) y_n^2(x) \mathrm{d}x},$$

在 $[a,b]$ 上绝对且一致收敛于 $f(x)$.

三、Bessel 函数及其应用

在极坐标系下求解圆域上的热传导问题时，会出现如下的变系数二阶常微分方程

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - \nu^2) y = 0, \tag{11.21}$$

通常称为 ν 阶 Bessel 方程．若以 $\sqrt{\lambda}x$ 代替 x，则(11.21)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right) - \frac{\nu^2}{x} y + \lambda x y = 0.$$

我们采用广义幂级数解法求 Bessel 方程的解．

设解为

$$y(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha},$$

其中 $c_0 \neq 0, \alpha, c_k$ 是待定的系数. 将其代入方程(11.21)得到一系列方程

$$
\begin{cases}
\alpha^2 - \nu^2 = 0 \\
c_1[(\alpha+1)^2 - \nu^2] = 0 \\
c_2[(\alpha+2)^2 - \nu^2] + c_0 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots \\
c_k[(\alpha+k)^2 - \nu^2] + c_{k-2} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots
\end{cases},
$$

其中 $\alpha^2-\nu^2=0$ 称为指标方程．由 $\alpha^2-\nu^2=0$ 得 $\alpha=\nu$ 或 $\alpha=-\nu$.

当 $\alpha=\nu$ 时，有

$$
c_1 = 0,\quad c_2 = \frac{-c_0}{2(2\nu+2)},\cdots,\quad c_k = \frac{-c_{k-2}}{k(2\nu+k)},\cdots.
$$

因为 $c_0\neq 0, c_1=0$，故

$$
\begin{aligned}
c_{2m-1} &= 0, \\
c_{2m} &= -\frac{c_{2m-2}}{2m(2\nu+2m)} \\
&= (-1)^m \frac{c_0}{2^{2m}m!(\nu+m)(\nu+m-1)\cdots(\nu+1)} \\
&= \frac{(-1)^m c_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2m}m!\Gamma(\nu+m+1)},\quad m=1,2,\cdots.
\end{aligned}
$$

于是方程(11.21)的解为

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m c_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2m}m!\Gamma(\nu+m+1)} x^{2m+\nu} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)} c_0 2^\nu \Gamma(\nu+1) \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu},
\end{aligned}
$$

其中 c_0 为不等于零的任意常数．今取 $c_0=\dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$，得(11.21)的一个特解

$$
y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}.
$$

易知这个级数在R上收敛，其和函数称为 ν **阶第一类 Bessel 函数**，

记为 $J_\nu(x)$，即

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

当 $\alpha = -\nu$ 时，同样可得方程(11.21)的另一个解，若取 $c_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$，则得特解

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}.$$

这个级数对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 也是收敛的，其和函数称为 $-\nu$ 阶第一类 Bessel 函数，记为 $J_{-\nu}(x)$，即

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

当 ν 不是整数时，$y_1(x) = J_\nu(x)$ 与 $y_2(x) = J_{-\nu}(x)$ 线性无关，于是方程(11.21)的通解为

$$y = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x),$$

其中 A, B 为任意常数. 显然

$$Y_\nu(x) = \frac{(\cos\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

也是(11.21)的一个特解且与 $J_\nu(x)$线性无关，因此(11.21)的通解也可写为

$$y = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x).$$

当 $\nu = n$ 为整数时，$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$，即 $J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 线性相关．为求通解，须另外寻找一个与 $J_n(x)$线性无关的特解，这只要令 $Y_n(x) = \lim\limits_{\nu\to n} Y_\nu(x)$ 即可．

事实上，由 L'Hospital 法则知 $Y_n(x)$是有意义的，且

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}\bigg|_{\nu=n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\bigg|_{\nu=n}\right].$$

容易验证，$Y_n(x)$是方程(11.21)的解．还可证明，当 $x \to 0$ 时，$Y_n(x) \to -\infty$，$J_n(x) \to 0$. 因此 $Y_n(x)$与 $J_n(x)$是线性无关的，故此

时(11.21)的通解为

$$y = A\mathrm{J}_n(x) + B\mathrm{Y}_n(x).$$

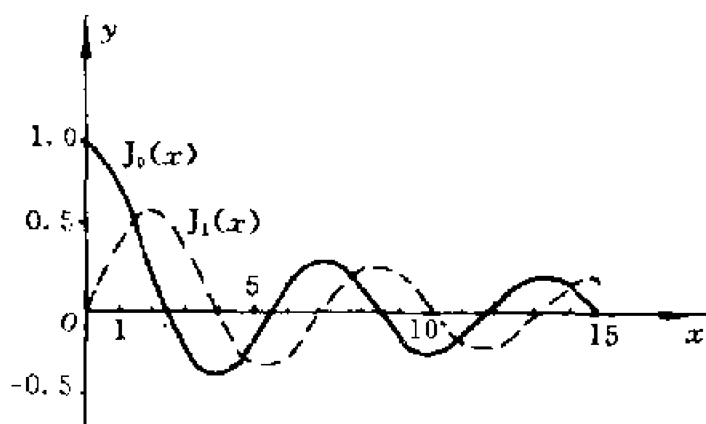


图 11-6

由上面的讨论知，不论 ν 是否为整数，Bessel 方程(11.21)的通解都可表示为

$$y = A\mathrm{J}_\nu(x) + B\mathrm{Y}_\nu(x).$$

通常称 $\mathrm{Y}_\nu(x)$ 为**第二类 Bessel 函数**或 Neumann 函数.

Bessel 函数有许多重要性质，此处只给出在分离变量法中要用到的第一类 Bessel 函数的有关性质.

显然 $\mathrm{J}_0(0)=1$，$\mathrm{J}_n(0)=0$，$\mathrm{J}_n(-x)=(-1)^n\mathrm{J}_n(x)$，$n=1,2,\cdots$，

1. Bessel 函数的零点

$\mathrm{J}_n(x)$有可数多个单重实零点($x=0$ 除外)且关于原点对称分布，因而 $\mathrm{J}_n(x)$有可数个正零点 $\mu_i^{(n)}$，$i=1,2,\cdots$.

$\mathrm{J}_n(x)$与 $\mathrm{J}_{n+1}(x)$的零点是彼此相间分布的，即 $\mathrm{J}_n(x)$的任何两个相邻的零点之间，有且仅有 $\mathrm{J}_{n+1}(x)$的一个零点，$n=0,1,2,\cdots$. 图 11-6 给出了 $\mathrm{J}_0(x)$和 $\mathrm{J}_1(x)$的图形，从中可看出零点分布的大致情况. 附录一中给出了 $\mathrm{J}_n(x)(n=0,1,2,3,4,5)$的前 9 个正零点 $\mu_i^{(n)}(i=1,2,\cdots,9)$的近似值，以备查阅.

2. Bessel 函数的推递公式

通过直接计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)] = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x), \qquad (11.22)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu} \mathrm{J}_\nu(x)] = -x^{-\nu} \mathrm{J}_{\nu+1}(x). \qquad (11.33)$$

特别地，有

$$[xJ_1(x)]'=xJ_0(x),\quad J_0'(x)=-J_1(x). \tag{11.24}$$

求出(11.22)式左边的导数后同除以 $x^{\nu-1}$，求出(11.23)左边的导数后同除以 $x^{-\nu-1}$，将所得两式相减得到

$$J_\nu(x)=\frac{x}{2\nu}[J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)], \tag{11.25}$$

相加得到

$$J_\nu'(x)=\frac{1}{2}[J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)]. \tag{11.26}$$

3. ν 阶 Bessel 函数系 $\{J_\nu(\sqrt{\lambda_i}\,x)\}$ 的完全正交性

由于 $J_\nu(x)$ 是 ν 阶 Bessel 方程(11.21)的解．因此 $J_\nu(\sqrt{\lambda}\,x)$ 是带参数 λ 的 ν 阶 Bessel 方程

$$x^2y''+xy'+(\lambda x^2-\nu^2)y=0 \tag{11.27}$$

的解．

现考虑下面的定解问题

$$\begin{cases}x^2y''+xy'+(\lambda x^2-\nu^2)y=0, & 0<x<l\\ y|_{x=l}=0, & |y(0)|<+\infty\end{cases},$$

这是一个 Sturm-Liouiville 固有值问题．

当 $\lambda>0$ 时，方程(11.27)有非零解

$$y(x)=AJ_\nu(\sqrt{\lambda}\,x)+BY_\nu(\sqrt{\lambda}\,x).$$

因为当 $x\to 0$ 时，$Y_\nu(\sqrt{\lambda}\,x)\to-\infty$，为满足边界条件 $|y(0)|<+\infty$，故取 $B=0$. 又由 $y|_{x=l}=0$ 得 $J_\nu(\sqrt{\lambda}\,l)=0$. 由此得 $\sqrt{\lambda}\,l=\mu_i^{(\nu)}$，即固有值为

$$\lambda_i=\left(\frac{\mu_i^{(\nu)}}{l}\right)^2,\quad i=1,2,\cdots,$$

固有函数系为

$$\left\{J_\nu\left(\frac{\mu_i^{(\nu)}}{l}x\right)\right\}\quad i=1,2,\cdots.$$

由 Sturm-Liouville 理论知，当 $\nu>-1$ 时，$\{J_{\nu i}\}$是 $L^2_\rho[0,l]$（其中 $\rho(x)=x$）中的一个完全正交系，即

$$\int_0^l x J_\nu\left(\sqrt{\lambda_i}\, x\right) J_\nu\left(\sqrt{\lambda_k}\, x\right) \mathrm{d}x=\begin{cases}0 & \text{当 } k\neq i \\ \| J_{\nu i}\|^2 & \text{当 } k=i\end{cases},$$

且对任意的 $f\in L^2[0,l]$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_{\nu i}\rangle|^2 = \| f\|^2, \quad \left(e_{\nu i} = \frac{J_{\nu i}}{\| J_{\nu i}\|}\right).$$

经计算得

$$\begin{aligned}\| J_{\nu i}\|^2 &= \int_0^l x J_\nu^2\left(\frac{\mu_i^{(\nu)}}{l} x\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i^{(\nu)}) \\ &= \frac{l^2}{2} J_{\nu-1}^2(\mu_i^{(\nu)}), \quad (i = 1,2,3,\cdots).\end{aligned}$$

当 $\nu = 0$ 时，$\| J_{0i}\|^2 = \frac{l^2}{2} J_1^2(\mu_i^{(0)})$.

类似地可得问题

$$\begin{cases}x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2)y = 0, & 0 < x < l \\ y'|_{x=l} = 0, \quad |y(0)| < +\infty\end{cases}$$

的固有值为

$$\lambda_i = \left(\frac{\alpha_i^{(\nu)}}{l}\right)^2, \ (\alpha_i^{(\nu)} \text{ 是 } J_\nu'(x) \text{ 的正零点}),$$

及固有函数系

$$\left\{J_\nu\left(\frac{\alpha_i^{(\nu)}}{l} x\right)\right\}, \quad i = 1,2,\cdots.$$

此时

$$\begin{aligned}\| J_{\nu i}\|^2 &= \int_0^l x J_\nu^2\left(\frac{\alpha_i^{(\nu)} x}{l}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{l^2}{2}\left[1 - \left(\frac{\nu}{\alpha_i^{(\nu)}}\right)^2\right] J_\nu^2(\alpha_i^{(\nu)}), \quad i = 1,2,\cdots.\end{aligned}$$

根据 Sturm-Liouville 理论，当函数 f 满足一定条件时，可展为 Fourier-Bessel 级数．

下面举例说明 Bessel 函数在求解定解问题中的应用．

例 11.12 半径为 1 的均匀薄圆盘，内部无热源，边界温度始终为 0℃，初始温度分布为 $1-\rho^2$，求圆盘的温度分布规律．

解 由于是圆域，宜采用极坐标系，又因为边界条件及初始函数都与 θ 无关，故可推知温度分布也与 θ 无关，即 $u=u(\rho,t)$. 于是定解问题为

$$(\text{VI})\begin{cases} u_t = a^2(u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho}u_\rho), & 0<\rho<1,\ t>0 \\ u|_{\rho=1} = 0 \\ u|_{t=0} = 1-\rho^2 \\ |u| < +\infty \end{cases}$$

设 $u(\rho,t)=R(\rho)T(t)$，代入方程并分离变量得

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{\rho^2R(\rho)}\overset{\text{令}}{=\!=\!=}-\beta^2,\quad (\beta>0),$$

即

$$T'(t)+a^2\beta^2T(t)=0, \tag{11.28}$$

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+\beta^2\rho^2R(\rho)=0. \tag{11.29}$$

由 $u|_{\rho=1}=0$ 得 $R(1)=0$. 由 $|u|<+\infty$ 知 $|R(0)|<+\infty$. 于是得固有值问题

$$\begin{cases} \rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+\beta^2\rho^2R(\rho)=0,\ 0<\rho<1 & (11.29) \\ R(1)=0,\quad |R(0)|<+\infty \end{cases}$$

方程(11.29)是带参量 β^2 的零阶 Bessel 方程，由上面的讨论可得固有值

$$\lambda_k=\beta_k^2=(\mu_k^{(0)})^2,\quad k=1,2,\cdots$$

及固有函数系

$$\{J_0(\mu_k^{(0)}\rho)\},\ k=1,2,\cdots.$$

为简单起见下文中把 $\mu_k^{(0)}$ 写为 μ_k, $k \in \mathbb{N}$.

由方程(11.28)

$$T'(t) + a^2\mu_k^2 T(t) = 0$$

得
$$T_k(t) = c_k e^{-a^2\mu_k^2 t}, \quad k = 1,2,\cdots.$$

所以

$$u(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-a^2\mu_k^2 t} J_0(\mu_k \rho).$$

由初始条件得

$$1 - \rho^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\mu_k \rho)$$

从而

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{\| J_{0k} \|^2}\int_0^1 \rho(1-\rho^2) J_0(\mu_k\rho)\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{2}{J_1^2(\mu_k)}\left[\int_0^1 \rho J_0(\mu_k\rho)\mathrm{d}\rho - \int_0^1 \rho^3 J_0(\mu_k\rho)\mathrm{d}\rho\right] \\
&= \frac{2}{J_1^2(\mu_k)}\frac{1}{\mu_k^2}\left[\int_0^1 (\mu_k\rho) J_0(\mu_k\rho)\mathrm{d}(\mu_k\rho)\right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \rho^2 \cdot (\mu_k\rho) J_0(\mu_k\rho)\mathrm{d}(\mu_k\rho)\right] \\
&= \frac{2}{J_1^2(\mu_k)}\frac{1}{\mu_k^2}\left[(\mu_k\rho)J_1(\mu_k\rho)\Big|_0^1\right. \\
&\quad \left. - \rho^2(\mu_k\rho)J_1(\mu_k\rho)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \mu_k\rho^2 J_1(\mu_k\rho)\mathrm{d}\rho\right] \\
&= \frac{4}{J_1^2(\mu_k)\mu_k^4}\int_0^1 (\mu_k\rho)^2 J_1(\mu_k\rho)\mathrm{d}(\mu_k\rho) \\
&= \frac{4}{J_1^2(\mu_k)\mu_k^4}\left[(\mu_k\rho)^2 J_2(\mu_k\rho)\right]\Big|_0^1 \\
&= \frac{4J_2(\mu_k)}{\mu_k^2 J_1^2(\mu_k)} \\
&= \frac{8}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}, \quad k = 1,2,\cdots.
\end{aligned}$$

在积分过程中应用了递推公式(11.24)和(11.22),化简时应用了(11.25).

最后得到定解问题(Ⅵ)的解为

$$u(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} J_0(\mu_k \rho) e^{-a^2 \mu_k^2 t},$$

其中 μ_k 为 $J_0(\rho)$ 的第 k 个正零点.

习 题 十 一

1. 解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = x(l-x) \end{cases}$$

2. 长为 l 的细杆,内部无热源,两个端点温度保持 0℃,已知初始温度分布为 $\sin\frac{2\pi x}{l}$,求杆的温度分布.

3. 求解下列定解问题.

(1) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 0 \\ u|_{t=0} = \sin x,\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = x \end{cases}$.

4. 求下列定解问题的解.

(1) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u_x|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = x\sin\frac{\pi x}{l},\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$.

5. 长为 l 的细杆,内部无热源,$x=0$ 端绝热,在 $x=l$ 端热量自由散发至 0℃

的介质中去，已知初始温度为 $\varphi(x)$，求杆的温度分布 $u(x,t)$.

6. 求解下列定解问题.

(1) $\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + x(l-x), & 0<x<l,\ t>0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$；

(2) $\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + \sin\dfrac{3\pi x}{2l}\sin\dfrac{3\pi at}{2l}, & 0<x<l,\ t>0 \\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + A\sin\omega t, & 0<x<l,\ t>0 \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \dfrac{A}{\omega} \end{cases}$

7. 求解下列定解问题.

(1) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}-2ku_t, & 0<x<l,\ t>0 \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$ $\left(0<k<\dfrac{\pi a}{l}\right)$；

(2) $\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}-b^2u+g, & 0<x<l,\ t>0 \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=0 \end{cases}$ (b,g 为常数).

8. 求解下列定解问题.

(1) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+A, & 0<x<l,\ t>0 \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=B \\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$ (A,B 为常数)；

(2) $\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0 \\ u_x|_{x=0}=\dfrac{q}{k},\ u_x|_{x=l}=\dfrac{-q}{k} \\ u|_{t=0}=A \end{cases}$ (q,k,A 为常数).

9. 解下列定解问题.

(1) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\quad 0<y<b \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=a}=Ay \\ u_y|_{y=0}=0,\ u_y|_{y=b}=0 \end{cases}$；

(2) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=-2y, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0 \\ u|_{y=0}=u|_{y=1}=0 \end{cases}$.

10. 均匀薄板占据区域：$0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y<+\infty$，内部无热源，边界上温度为 $u|_{x=0}=0$，$u|_{x=a}=0$，$u|_{y=0}=u_0$，$\lim\limits_{y\to+\infty} u=0$. 求板的稳定温度分布 $u(x,y)$.

11. 求解扇形域 $D=\{(\rho,\theta)|0\leqslant\rho\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant\beta\}$内的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u=0 \\ u|_{\theta=0}=0,\ u|_{\theta=\beta}=0,\ u|_{\rho=a}=f(\theta) \end{cases}$$

12. 在圆域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$内求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=\sqrt{x^2+y^2} \\ u|_{x^2+y^2=1}=2 \end{cases}.$$

13. 在圆环域 $D=\{(x,y)|a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2, 0<a<b\}$上求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=12(x^2-y^2), & a^2<x^2+y^2<b^2 \\ u|_{x^2+y^2=a^2}=0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x^2+y^2=b^2}=0 \end{cases}.$$

14. 求解球内 Laplace 方程边值问题.

(1) $\begin{cases} \Delta u=0,\ 0<r<1,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi \\ u|_{r=1}=\begin{cases} A & 0\leqslant\theta\leqslant\alpha \\ 0 & \alpha<\theta\leqslant\pi \end{cases} \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} \Delta u=0,\ 0<r<a,\ 0<\theta<\pi \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=A\cos\theta \end{cases}$.

15. 证明

$$\int_0^l x J_0\left(\frac{\mu_i^{(1)}}{l}x\right) J_0\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{l}x\right) dx=\begin{cases} \dfrac{l^2}{2}J_0^2(\mu_i^{(1)}) & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}.$$

16. 将函数

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{当 } 0<x<1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{当 } x=1 \\ 0 & \text{当 } 1<x<2 \end{cases}$$

展为关于$\{J_0(\alpha_k x)\}$的广义 Fourier 级数，其中α_k是$J_0(2x)$的正零点，$k=1,2,\cdots$.

17. 设圆柱体半径为R，高为H. 内部无热源，下底传进热流q_0，侧面与上底保持 0℃，求圆柱内温度分布.

18. 求解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0<r<R \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=0, \ |u(0,t)|<+\infty \\ u|_{t=0}=0, \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=1-\dfrac{r^2}{R^2} \end{cases}$$

第十二章　解定解问题的其它方法

本章将介绍定解问题的另外三种解法. 首先介绍波动方程 Cauchy 问题的 D'Alembert 解法及解的物理意义. 其次介绍定解问题的积分变换解法，它是工程技术中常用的方法. 最后以 Laplace 方程 Dirichlet 问题为例，介绍 Green 函数法，这种方法得到的解是积分形式，便于进行理论分析.

§ 12.1　波动方程的 D'Alembert 解法

对于一维波动方程的 Cauchy 问题，可以先求出方程的一般解，再由初始条件定出其中的任意函数，从而得到定解问题的解——D'Alembert 公式. 对于高维波动方程的 Cauchy 问题，通过球面平均值法将其降维而得到求解公式——Poisson 公式.

一、一维波动方程 Cauchy 问题的解

设有一维波动方程 Cauchy 问题

$$(\text{Ⅶ})\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad -\infty<x<+\infty,\ t>0 & (12.1)\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x), \quad -\infty<x<+\infty & (12.2)\end{cases}$$

方程(12.1)是双曲型方程，它有两族实特征线

$$x+at=c_1, \quad x-at=c_2.$$

作自变量变换

$$\xi=x+at, \quad \eta=x-at.$$

则方程化为

$$u_{\xi\eta}=0.$$

易知此方程的通解为

$$u=F(\xi)+G(\eta),$$

其中 F,G 是任意二次连续可微函数. 代回原自变量,即得方程(12.1)的通解

$$u(x,t)=F(x+at)+G(x-at). \tag{12.3}$$

由初始条件得

$$\begin{cases}F(x)+G(x)=\varphi(x) & (12.4)\\ aF'(x)-aG'(x)=\psi(x) & (12.5)\end{cases}$$

式(12.5)对 x 积分得

$$F(x)-G(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(s)\mathrm{d}s+C. \tag{12.6}$$

由(12.4)及(12.6)立即得到

$$F(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(s)\mathrm{d}s+\frac{C}{2},$$

$$G(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(s)\mathrm{d}s-\frac{C}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}&F(x+at)+G(x-at)\\=&\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s+\frac{C}{2}\\&+\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\psi(s)\mathrm{d}s-\frac{C}{2}\\=&\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

即定解问题(Ⅶ)的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s. \tag{12.7}$$

以上解法称为 **D'Alembert 法**,解的表达式(12.7)称为一维波动

方程 Cauchy 问题的 **D'Alembert 公式.**

当 $\varphi\in C^2(-\infty,+\infty)$，$\psi\in C^1(-\infty,+\infty)$时，定解问题(Ⅶ)是适定的且其解由公式(12.7)给出. 当 φ,ψ 不满足这些条件时，可以去求(Ⅶ)的广义解.

例 12.1 初始位移 $\varphi(x)=e^{-x^2}$，初始速度 $\psi(x)=\sin x$ 的无界弦作自由振动，求其振动规律 $u(x,t)$.

解 定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & -\infty<x<+\infty,\ t>0 \\ u|_{t=0}=e^{-x^2} \\ u_t|_{t=0}=\sin x \end{cases}$$

由 D'Alembert 公式得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[e^{-(x+at)^2}+e^{-(x-at)^2}\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin s\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{-(x+at)^2}+e^{-(x-at)^2}\right]+\frac{1}{a}\sin x\sin at.$$

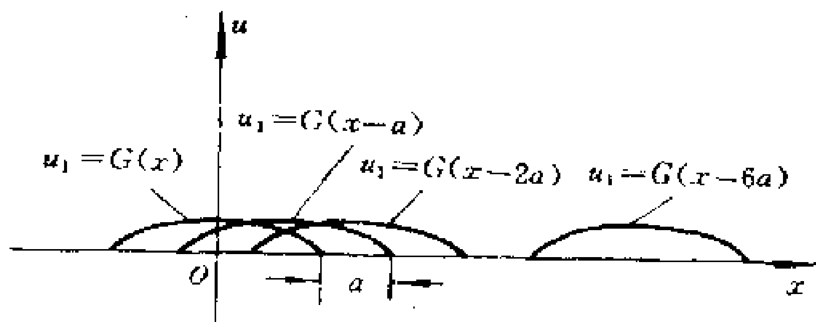


图 12-1

D'Alembert 公式(12.7)有明显的物理意义. 由于(12.7)是由(12.3)得到的，故只需就(12.3)式

$$u(x,t)=G(x-at)+F(x+at)$$

进行讨论. 记 $u_1=G(x-at)$，$u_2=F(x+at)$. 当 t 取不同值时，函数

$u_1=G(x-at)$表示如图 12-1 所示的曲线族. 它表明函数 $u_1=G(x-at)$描述的是以等速 a 向右传播的波，称为右行波. 同理，$u_2=F(x+at)$则是速度为 a 的左行波. 于是问题(Ⅶ)的解(12.7)，是速度相同的右行波和左行波的叠加，故求解定解问题(Ⅶ)的 D'Alemert 方法又称为**行波法**.

由于方程(12.1)的特征线为 $x+at=c_1$，$x-at=c_2$，于是沿特征线分别可得 $F(x+at)=F(c_1)$，$G(x-at)=G(c_2)$，故可知在 xt 平面上，行波是沿特征线传播的(见图 12-2).

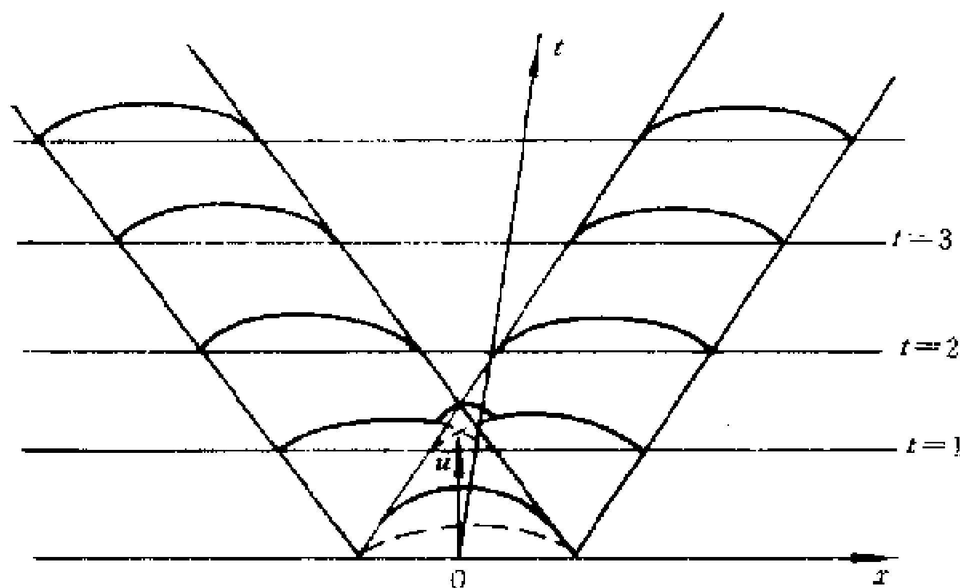


图 12-2

定解问题(Ⅶ)描述的是仅由初始扰动(φ及ψ)所引起的振动现象. 下面给出解 $u(x,t)$对初始函数 φ,ψ 的依赖关系. 由公式(12.7)或图 12-2 易知：

(1) $u(x,t)$在 xt 平面上某点 $P(x_0,t_0)$的值(即弦上点 x_0 在 t_0 时刻的位移)只依赖于 φ,ψ 在闭区间 $I=[x_0-at_0,x_0+at_0]$上的性质，而与它们在 I 之外的性态无关. 常称区间$[x_0-at_0,x_0+at_0]$为点 P 的**依赖区间**，它是由过点 P 的

$$x-at=x_0-at_0,\ x+at=x_0+at_0$$

与 x 轴的交点所界的闭区间(见图 12-3).

(2) 初始条件在某区间$[x_1,x_2]$上的状况(即 φ,ψ 在$[x_1,x_2]$的性态)只能影响到区域

$$D=\{(x,t)\mid x_1-at\leqslant x\leqslant x_2+at,t>0\}$$

上各点处的位移 $u(x,t)$,称 D 是$[x_1,x_2]$的**影响区域**. D 是由过 x 轴上点 x_1,x_2 的特征线

$$x=x_1-at,$$
$$x=x_2+at$$

及 x 轴所围的无界域(见图 12-4).

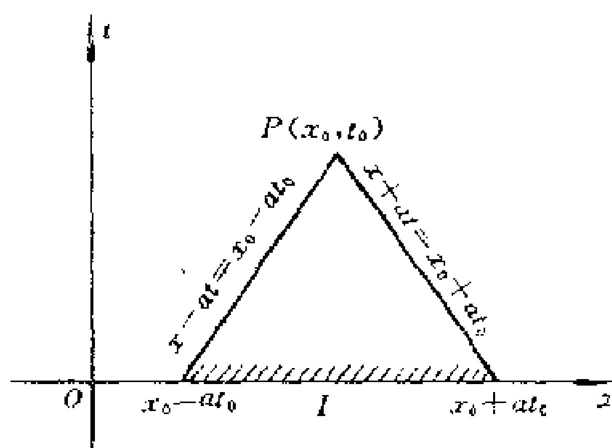


图 12-3

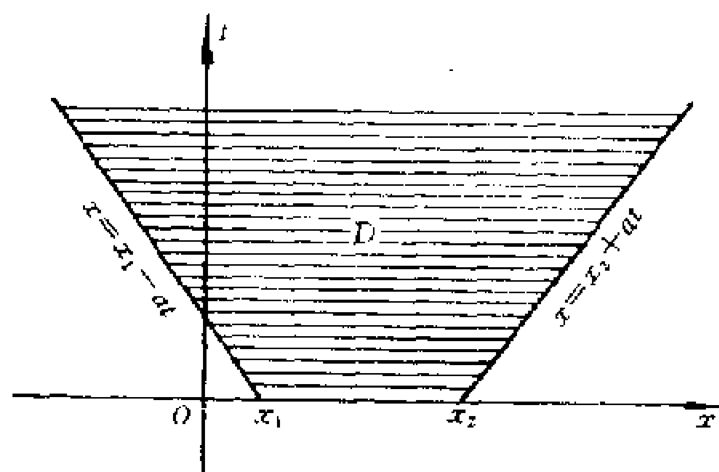


图 12-4

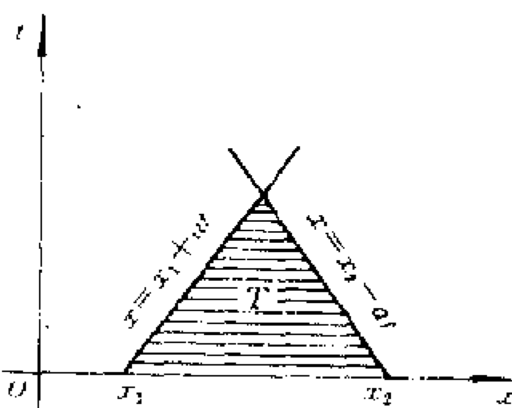


图 12-5

(3) φ,ψ 在$[x_1,x_2]$上的值能够完全决定 $u(x,t)$在三角形区域

$$T=\{(x,t)\mid x_1+at\leqslant x\leqslant x_2-at,t>0\}$$

上各点处的值. 称 T 为$[x_1,x_2]$的**决定区域**(见图 12-5).

利用 D'Alembert 公式也可以求解半无界弦(即有一个端点

的弦)的自由振动问题,下面举两例说明.

例 12.2 解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < +\infty,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases}.$$

解 这已不是 Cauchy 问题. 为了对这个混合问题应用 D'Alembert 公式,我们将初始函数 φ,ψ 延拓成整个数轴上有定义的函数 Φ 和 Ψ. 于是有

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(s)\mathrm{d}s.$$

将 φ,ψ 作怎样的延拓,并不是任意的. 除了延拓后的 Φ,Ψ 要满足 D'Alembert 公式的条件外,特别要使解 $u(x,t)$ 满足边界条件,本例为 $u|_{x=0}=0$,故应有

$$\frac{1}{2}[\Phi(at) + \Phi(-at)] + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\Psi(s)\mathrm{d}s = 0.$$

显然只要 Φ,Ψ 都是奇函数时,上式便能成立. 于是只要对 φ,ψ 都作奇延拓:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{当 } x > 0 \\ -\varphi(-x) & \text{当 } x < 0 \end{cases},$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{当 } x > 0 \\ -\psi(-x) & \text{当 } x < 0 \end{cases}.$$

最后得定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(s)\mathrm{d}s \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s & \text{当 } t \leqslant \dfrac{x}{a} \\ \dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s & \text{当 } t > \dfrac{x}{a} \end{cases}. \end{aligned}$$

若端点自由，即边界条件为 $u_x|_{x=0}=0$，则应有

$$\frac{1}{2}[\Phi'(at)+\Phi'(-at)]+\frac{1}{2a}[\Psi(at)-\Psi(-at)]=0.$$

显然当 Φ' 为奇函数，Ψ 为偶函数时上式成立. 因此，只需对 φ 和 ψ 都作偶延拓：

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{当 } x>0\\ \varphi(-x) & \text{当 } x<0\end{cases},$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & \text{当 } x>0\\ \psi(-x) & \text{当 } x<0\end{cases}.$$

此时定解问题的解为

$$u(x,t)=$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s & \text{当 } t\leqslant\frac{x}{a}\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s\right. & \\ \qquad\left.+\int_0^{at-x}\psi(s)\mathrm{d}s\right] & \text{当 } t>\frac{x}{a}\end{cases}.$$

当边界条件是非齐次的时候，对 φ,ψ 作何种延拓就难以确定了. 但是根据叠加原理，我们可将原定解问题分解成两个定解问题来解，见下例.

例 12.3 求端点依某种规律运动的半无界弦自由振动的规律.

解 定解问题为

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<+\infty,\quad t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x), & 0<x<+\infty\\ u|_{x=0}=\mu(t), & t>0\end{cases}.$$

设 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，其中 $v(x,t)$，$w(x,t)$ 分别满足定解问题

$$(1)\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx}, & x>0,\ t>0 \\ v|_{t=0}=\varphi(x),\ v_t|_{t=0}=\psi(x), & x>0 \\ v|_{x=0}=0, & t>0, \end{cases}$$

及

$$(2)\begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx}, & x>0,\ t>0 \\ w|_{t=0}=0,\ w_t|_{t=0}=0, & x>0 \\ w|_{x=0}=\mu(t), & t>0 \end{cases}$$

由例 12.2 知

$$v(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s & t\leqslant\frac{x}{a} \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s & t>\frac{x}{a} \end{cases}.$$

定解问题(2)描述的是纯粹由(左)端点的运动所引起的弦的自由振动现象.因此在弦上只有右行波,即

$$w(x,t)=G(x-at)\ ,$$

其中 G 为任意可微函数.由边界条件,应有

$$G(-at)=\mu(t),\ t>0.$$

令 $-at=z$ 得

$$G(z)=\mu(-\frac{z}{a}),\quad z<0,$$

于是

$$w(x,t)=G(x-at)=\mu(t-\frac{x}{a}),\quad t>\frac{x}{a}.$$

为得到当 $0<t\leqslant\frac{x}{a}$ 时 G 的表达式,可认为边界条件 $w|_{x=0}$ 当 $t\leqslant 0$ 时恒为零,故有

$$w(x,t)=G(x-at)=\begin{cases} 0 & t\leqslant\frac{x}{a} \\ \mu(t-\frac{x}{a}) & t>\frac{x}{a} \end{cases}.$$

由叠加原理得原定解问题的解为

$$
u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s & t\leqslant\frac{x}{a}\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s & \\ \quad+\mu(t-\frac{x}{a}) & t>\frac{x}{a}\end{cases}.
$$

二、三维波动方程的 Poisson 公式

对于三维波动方程的 Cauchy 问题

$$
(\text{Ⅷ})\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ t>0 & (12.8)\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z),u_t|_{t=0}=\psi(x,y,z),(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, & (12.9)\end{cases}
$$

虽然不能直接套用 D'Alembert 公式，但仍可设法用行波法求解.

先考虑 u 关于原点成球对称的特殊情况. 所谓球对称，是指波函数 u 在同一时刻在以原点为中心的同一球面上的值是常量. 在球坐标系中 u 只是 r 和 t 的函数 $u(x,t)$，而与 θ,φ 无关. 此时方程(12.8)化为

$$
u_{tt}=a^2\frac{1}{r}(ru)_{rr},
$$

即

$$
(ru)_{tt}=a^2(ru)_{rr}.
$$

若将 ru 当作未知函数，则由第一段的讨论可知其通解为

$$
ru=F(r+at)+G(r-at).
$$

于是

$$
u(x,t)=\frac{F(r+at)+G(r-at)}{r},
$$

其中 F,G 是任意二次连续可微函数.

下面再讨论一般情况. 由于在空间一点 M 处给以扰动，波就会沿以 M 为中心的各射线方向以相同速度传播，故考虑函数 $u(x,y,z,t)$ 在以点 $M(x,y,z)$ 为中心，r 为半径的球面 S_r^M 上的平均值 $\bar{u}(M,t;r)$. 当 M 固定时，$\bar{u}$ 只是 r 和 t 的函数. 设 $M(x,y,z)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中任一点，对任一实数 $r>0$，$u(M,t)$ 在球面

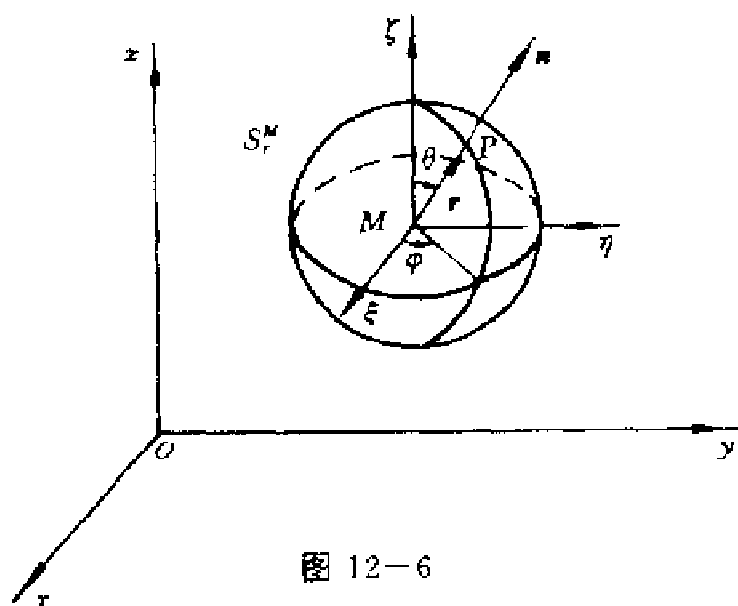


图 12—6

$$S_r^M=\{P\in\mathbb{R}^3\,|\,d(M,P)=r\}$$

上的平均值为

$$\overline{u}(M,t;r)=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint\limits_{S_r^M}u(\xi,\eta,\zeta,t)\mathrm{d}S,$$

其中 $\xi=x+r\sin\theta\cos\varphi,\eta=y+r\sin\theta\sin\varphi,\zeta=z+r\cos\theta$ 是 S_r^M 上任一点 P 的坐标；$\mathrm{d}S$ 是 S_r^M 上的曲面面积元素，在球坐标系中 $\mathrm{d}S=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$；于是

$$\overline{u}(M,t;r)=\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{S_r^M}u(\xi,\eta,\zeta,t)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \qquad (12.10)$$

现在证明 $r\overline{u}$ 满足一维波动方程. 事实上，将方程(12.8)在 S_r^M 所围成的闭球 V_r^M 上积分，利用 Gauss 公式并注意到式(12.10)，得

$$\iiint\limits_{V_r^M}u_{tt}\mathrm{d}V=a^2\iiint\limits_{V_r^M}\Delta u\mathrm{d}V$$

$$=a^2\oiint\limits_{S_r^M}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$$

$$=a^2 \oiint\limits_{S_r^M} \frac{\partial u}{\partial r} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

$$=a^2 r^2 \oiint\limits_{S_r^M} \frac{\partial}{\partial r} [u(\xi,\eta,\zeta,t)] \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

$$=a^2 r^2 \frac{\partial}{\partial r} \oiint\limits_{S_r^M} u(\xi,\eta,\zeta,t) \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

$$=a^2 r^2 \frac{\partial}{\partial r} [4\pi \bar{u}(M,t;r)]$$

$$=4\pi a^2 r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}.$$

而左端可化为

$$\iiint\limits_{V_r^M} u_{tt} \mathrm{d}V = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint\limits_{V_r^M} u \mathrm{d}V = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^r \mathrm{d}\rho \oiint\limits_{S_\rho^M} u(\xi,\eta,\zeta,t) \mathrm{d}S\right]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^r \rho^2 \mathrm{d}\rho \oiint\limits_{S_\rho^M} u(\xi,\eta,\zeta,t) \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi\right]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r 4\pi \bar{u} \rho^2 \mathrm{d}\rho$$

$$= 4\pi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r \rho^2 \bar{u} \mathrm{d}\rho,$$

因此有

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r \rho^2 \bar{u} \mathrm{d}\rho = a^2 r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}.$$

两边对 r 求导得

$$\frac{\partial^2 (r^2 \bar{u})}{\partial t^2} = r a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \bar{u}),$$

同除以 r 得

$$(r\bar{u})_{tt} = a^2 (r\bar{u})_{rr}.$$

故

$$r\bar{u}(M,t;r)=f(r+at)+g(r-at). \qquad (12.11)$$

为求出 $u(M,t)$，先将上式两边对 r 求导得

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})=\bar{u}+r\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}=f'(r+at)+g'(r-at), \qquad (12.12)$$

即

$$\bar{u}(M,t;r)=f'(r+at)+g'(r-at)-r\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}.$$

由于 $u(M,t)=\lim\limits_{r\to 0}\bar{u}(M,t;r)$，故令 $r\to 0$ 取极限得

$$u(M,t)=f'(at)+g'(-at). \qquad (12.13)$$

再将(12.11)两边对 t 求导得

$$r\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}=af'(r+at)-ag'(r-at), \qquad (12.14)$$

令 $r\to 0$ 取极限得

$$0=af'(at)-ag'(-at),$$

即

$$g'(-at)=f'(at).$$

将其代入(12.13)式得

$$u(M,t)=2f'(at).$$

只要根据初始条件求出 $2f'(at)$，即得到解 $u(x,y,z,t)$.

由(12.12)和(12.14)得

$$\begin{aligned}2f'(r+at)&=\frac{\partial(r\bar{u})}{\partial r}+\frac{r}{a}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\\&=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r}{4\pi r^2}\oiint_{S_r^M}u(\xi,\eta,\zeta,t)\mathrm{d}S\right]\\&\quad+\frac{r}{a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{S_r^M}u(\xi,\eta,\zeta,t)\mathrm{d}S\right]\\&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\oiint_{S_r^M}\frac{u(\xi,\eta,\zeta,t)}{r}\mathrm{d}S\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\oiint_{S_r^M}\frac{1}{r}\frac{\partial u(\xi,\eta,\zeta,t)}{\partial t}\mathrm{d}S.$$

令 $t=0$，由初始条件知

$$u(\xi,\eta,\zeta,0)=\varphi(\xi,\eta,\zeta),$$

$$\left.\frac{\partial u(\xi,\eta,\zeta,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(\xi,\eta,\zeta),$$

于是有

$$2f'(r)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\oiint_{S_r^M}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}S+\frac{1}{4\pi a}\oiint_{S_r^M}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}S.$$

以 at 取代 r 并注意 $\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}$，得

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\oiint_{S_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{at}\mathrm{d}S+\oiint_{S_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{at}\mathrm{d}S\right\}.\tag{12.15}$$

公式(12.15)称为三维波动方程 Cauchy 问题的 **Poisson 公式**. 其中 S_{at}^M 是以 $M(x,y,z)$ 为中心，at 为半径的球面，(ξ,η,ζ) 是 S_{at}^M 上任意一点，即

$$\xi=x+at\sin\theta\cos\varphi,\ \eta=y+at\sin\theta\sin\varphi,\ \zeta=z+at\cos\theta.$$

当初始函数 $\varphi\in C^3(\mathbb{R}^3)$，$\psi\in C^2(\mathbb{R}^3)$ 时，定解问题(Ⅷ)是适定的，其解由 Poisson 公式(12.15)给出. 三维波动方程 Cauchy 问题的这种求解方法称为球面平均值法.

例 12.4 求解定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ t>0\\ u|_{t=0}=y^2z,\ u_t|_{t=0}=0, & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\end{cases}$$

解 此处 $\varphi(x,y,z)=y^2z$，$\psi(x,y,z)=0$，故由 Poisson 公式得

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\oiint_{S_{at}^M}\frac{\eta^2\zeta}{at}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(y+at\sin\theta\sin\varphi)^2(z+at\cos\theta)}{at}(at)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}(4\pi a y^2 z t+\frac{4\pi}{3}a^3 z t^3)$$

$$=y^2 z+a^2 z t^2.$$

三、二维波动方程的 Poisson 公式

关于二维波动方程的 Cauchy 问题

$$(\text{IX})\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y),\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

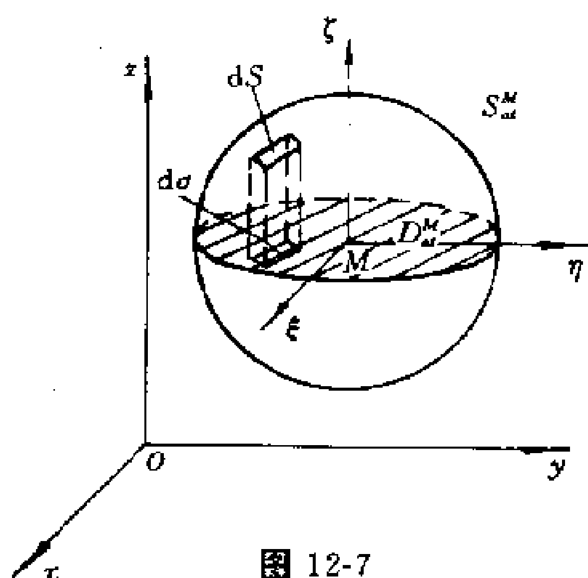


图 12-7

的解，可以使用"降维法"，由三维波动方程的 Poisson 公式得到.

定解问题(IX)是定解问题(VIII)当 u 不依赖于 z 的特殊情况，即(IX)的解应是 Poisson 公式中 φ,ψ 与 z 无关的特殊形式. 在(12.15)中，积分是在球面 S_{at}^M 上进行的. 由于 φ 和 ψ 与 z 无关，因此在球面上的曲面积分，就变成为在闭圆域

$$D_{at}^M=\{P(\xi,\eta)\,|\,d(M,P)\leqslant at\}$$

上的二重积分. 注意到在 S_{at}^M 上的曲面面积元素 $\mathrm{d}S$ 与 D_{at}^M 上的平面面积元素 $d\sigma$ 之间的关系(图 12-7)：

$$\begin{aligned}d\sigma&=\cos\theta\mathrm{d}S\\&=\frac{\pm\sqrt{(at)^2-\rho^2}}{at}\mathrm{d}S\\&=\frac{\pm\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}{at}\mathrm{d}S\end{aligned}$$

即

$$dS = \frac{\pm at}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\sigma,$$

其中正负号分别表示上下半球面上 dS 与 $d\sigma$ 之间的关系. 故有

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{D_{at}^M} \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta\right.$$

$$\left. + \iint\limits_{D_{at}^M} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta\right), \quad (12.16)$$

其中 $\xi = x + \rho\cos\varphi$, $\eta = y + \rho\sin\varphi$, $0 \leqslant \rho \leqslant at$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

公式(12.16)称为二维波动方程 Cauchy 问题的 Poisson 公式.

四、高维波动方程解的物理意义

为了研究 Poisson 公式(12.15)和(12.16)所描述的波动传播规律,我们假定初始函数 φ 和 ψ 在 $\mathbb{R}^3$ 的某个有界闭域 Ω 上恒为正,而在 $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ 上恒为零.

现考察任一点 $M \notin \Omega$ 在时刻 t 受到初始扰动的情况.

由公式(12.15)知,波函数 u 在 M 点于时刻 t 的值 $u(M,t)$ 完全由 φ 和 ψ 在球面 S_{at}^M 上的值决定. 由假定可知,只有当球面 S_{at}^M 与区域 Ω 相交时,(12.15)中的积分才不为零,从而 $u(M,t)$ 也不为零. 以 d 和 d' 分别表示点 M 到 Ω 的最近距离和最远距离(图 12-8). 当 $at < d$ 即 $t < \frac{d}{a}$ 时,球面 S_{at}^M 不与 Ω 相交,公式(12.15)中的曲面积分等于零,因而 $u(M,t) = 0$. 这说明此时初始扰动的"前锋"尚未到达 M 点. 当 $\frac{d}{a} \leqslant t \leqslant \frac{d'}{a}$ 时,球面 S_{at}^M 总与 Ω 相交,(12.15)中曲面积分大于零,说明点 M 处于受扰动状态. 初始扰动

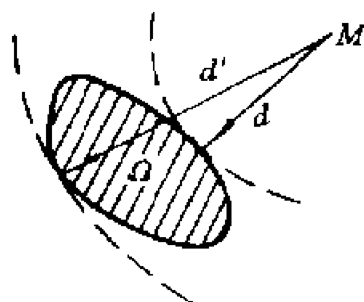


图 12-8

的"前锋"在 $t=\frac{d}{a}$ 时到达 M 点，而扰动的"阵尾"于 $t=\frac{d'}{a}$ 时到达 M 点. 当 $t>\frac{d'}{a}$ 时，球面已越过初始扰动区域 Ω，不再与 Ω 相交，故 $u(M,t)$ 又等于零，说明扰动已传过点 M，M 点又恢复静止状态.

由上面的分析可知，当初始扰动限制在空间某个局部范围时，空间任一点的扰动总有清晰的"前锋"和"阵尾"，这种现象称为"无后效现象"或 Huygens 原理.

再看公式(12.16)所描述的波动现象，此时波函数 $u(x,y,t)$ 取决于初始函数 φ,ψ 在圆域 D_{at}^M 上的值. 若初始扰动仅限于平面闭域 σ，则当 $t<\frac{d}{a}$ 时，积分域 D_{at}^M 与 σ 不相交，(12.16)中的积分为零，故 $u=0$，表明扰动尚未到达 M 点. 当 $\frac{d}{a}\leqslant t\leqslant\frac{d'}{a}$ 时，D_{at}^M 与 σ 相交，故 $u\neq 0$，点 M 处于扰动状态. 当 $t>\frac{d'}{a}$ 时，D_{at}^M 仍与 σ 相交(实际上是 $D_{at}^M\supset\sigma$)，(12.16)中的积分不为零，故仍有 $u\neq 0$，这说明点 M 一直处于扰动状态. 因此二维波传播与三维波传播不同，只有"前锋"而无"阵尾"，这种现象叫做波的弥散或有后效现象. 当然 M 点受扰动的程度，开始时逐渐增强，但自某时刻之后逐渐减弱.

§12.2 积分变换法

Fourier 变换和 Laplace 变换是两种最重要的积分变换，在数理方程中，它们主要用于求解无界域上的定解问题，但也适用于有界域的情况. 本节先简单介绍积分变换概念，然后给出 Fourier 变换和 Laplace 变换的定义、有关性质及其在解定解问题上的应用.

一、积分变换概念

设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 分别是 $[a,b]$ 和 $[\alpha,\beta]$ 上某种类型的函数集，$K(x,s)$ 是定义在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上的连续函数. 定义映射 $T:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 为

$$(Tf)(x)=\int_a^b f(x)K(x,s)\mathrm{d}x \quad (\text{对任意的 } f\in\mathscr{A}, s\in[\alpha,\beta]),$$

称 T 为**积分变换**,$K(x,s)$称为积分变换的核,$[a,b]$叫做变换域. $f\in\mathscr{A}$ 在 T 下的象记为 $F\in\mathscr{B}$,即

$$F(s)=\int_a^b f(x)K(x,s)\mathrm{d}x.$$

显然积分变换 T 是一个线性变换. 在一定条件下,T 的逆变换 T^{-1}存在且

$$T^{-1}(F)=T^{-1}(Tf)=f.$$

称 F 与 f 构成一个积分变换对.

当取不同的核和不同的区域时,就会得到不同的积分变换.

二、Fourier 变换及其性质

变换域为$(-\infty,+\infty)$,核为 $\mathrm{e}^{-i\omega x}$($i=\sqrt{-1}$,$\omega\in\mathbb{R}$)的积分变换称为 **Fourier 变换**,记为

$$\mathscr{F}:\mathscr{A}\to\mathscr{B}.$$

即任意的 $f\in\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{F}$ 下的象为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x. \tag{12.17}$$

通常 $F(\omega)$就称为 $f(x)$的 Fourier 变换,记为

$$\mathscr{F}[f(x)]=F(\omega) \text{ 或 } \mathscr{F}[f]=\mathscr{F}.$$

可以证明,当 f 在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积,且在任意有限区间上都满足 Dirichlet 条件时,则

(1) $f(x)$的 Fourier 变换 $F(\omega)$存在;

(2) $F(\omega)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数;

(3) $\mathscr{F}$ 的逆变换 $\mathscr{F}^{-1}$也存在且

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{i\omega x}\mathrm{d}\omega. \tag{12.18}$$

证明从略. 由此可知$f(x)=\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}[f(x)])$.

例 12.5 设有指数衰减函数

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t<0 \\ e^{-\beta t} & \text{当 } t\geqslant 0\end{cases}\qquad(\beta>0),$$

求 $\mathscr{F}[f]$.

解 $$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$
$$=\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(\beta+i\omega)t}dt$$
$$=\frac{1}{\beta+i\omega}=\frac{\beta-i\omega}{\beta^2+\omega^2}.$$

Fourier 变换有许多重要性质，现列出与解定解问题有关的几个性质，在这些性质中所涉及的变换都假定是存在的.

性质 1（线性性质）

设 $f_1,f_2\in\mathscr{A}$，$k_1,k_2\in\mathbb{C}$，$F_1,F_2\in\mathscr{B}$，则

$$\mathscr{F}[k_1f_1+k_2f_2]=k_1\mathscr{F}[f_1]+k_2\mathscr{F}[f_2];$$
$$\mathscr{F}^{-1}[k_1F_1+k_2F_2]=k_1\mathscr{F}^{-1}[F_1]+k_2\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}_2].$$

证 由定义及积分的线性性立即可得.

性质 2（微分性质）

若 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=0$，则 $\mathscr{F}[f']=i\omega\mathscr{F}[f]$.

一般地，若 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f^{(k)}(x)=0\ (k=0,1,\cdots,n-1)$，则

$$\mathscr{F}[f^{(n)}]=(i\omega)^n\mathscr{F}[f].$$

证 $$\mathscr{F}[f'(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)e^{-i\omega x}dx$$
$$=f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+i\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$
$$=i\omega\mathscr{F}[f(x)].$$

证毕.

注 事实上，当假定 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f'(x)|dx$ 收敛时，可以推出条件 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=0$.

性质 3（积分性质）

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{x}f(\xi)d\xi\right]=\frac{1}{i\omega}\mathscr{F}[f(x)].$$

证 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x),\text{于是}$$

$$\mathscr{F}[f(x)] = \mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = (i\omega)\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right],$$

所以

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{i\omega}\mathscr{F}[f(x)].$$

证毕.

性质 4(位移性质)

$$\mathscr{F}[f(x \pm x_0)] = \mathrm{e}^{\pm i\omega x_0}\mathscr{F}[f(x)];$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega \mp \omega_0)] = \mathrm{e}^{\pm i\omega_0 x}f(x).$$

证
$$\mathscr{F}[f(x \pm x_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x \pm x_0)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{令 } t = x \pm x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega(t \mp x_0)}\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{e}^{\pm i\omega x_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{e}^{\pm i\omega x_0}\mathscr{F}[f(x)].$$

证毕.

称 $f_1(x) * f_2(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(x-t)\mathrm{d}t$ 为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的卷积. 显然, $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$. 关于卷积的 Fourier 变换有下面的卷积定理.

性质 5(卷积定理)

$$\mathscr{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \mathscr{F}[f_1(x)] \cdot \mathscr{F}[f_2(x)]$$

或

$$\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)] = \mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)] * \mathscr{F}^{-1}[F_2(\omega)].$$

证
$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x) * f_2(x)]\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(x-t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-t)\mathrm{e}^{-i\omega(x-t)}\mathrm{d}(x-t)$$

$$= \mathscr{F}[f_1] \cdot \mathscr{F}[f_2].$$ 证毕.

性质 6(乘积定理)

$$\mathscr{F}[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f_1(x)] * \mathscr{F}[f_2(x)].$$

证 设 $\mathscr{F}[f_1]=F_1$, $\mathscr{F}[f_2]=F_2$.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f_1 \cdot f_2] &= \int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)f_2(x)]e^{-i\omega x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\right]e^{-i\omega x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)e^{-i(\omega-\lambda)x}dx\right]d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\lambda)F_2(\omega-\lambda)d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f_1] * \mathscr{F}[f_2].\end{aligned}$$ 证毕.

利用这些性质可以简化求 $\mathscr{F}[f(x)]$ 或 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$ 的运算. 在实际应用中,往往通过查表求 Fourier 变换或逆变换.

三、Laplace 变换及其性质

Fourier 变换要求函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,而且绝对可积. 但很多常见的函数,如常数、多项式、三角函数等都不是绝对可积的;而以时间 t 为自变量的函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 内无定义;这就在很大程度上限制了它的应用. 现对 Fourier 变换作如下改进:

设

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{-\beta t}f(t) & \text{当 } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{当 } t < 0 \end{cases},$$

其中 β 是使

$$\mathscr{F}[f_1(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

存在的适当大的实数. 若记 $p=\beta+i\omega$,则有

$$\mathscr{F}[e^{-\beta t}f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

由积分

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{12.19}$$

确定的变换称为 $f(t)$的 **Laplace 变换**,记为 $\mathscr{L}[f(t)]=F(p)$. 实际上 $\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{F}[e^{-\beta t}f(t)]$,由此可得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(p)e^{pt}dp, \tag{12.20}$$

称为 $F(p)$的 **Laplace 逆变换**,记为 $\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=f(t)$.

可以证明,若函数 $f(t)$满足条件

(i) 当 $t<0$ 时,$f(t)\equiv 0$;

(ii) 当 $t\geqslant 0$ 时,f 及 f' 至多只有有限个第一类间断点;

(iii) 存在常数 $M\geqslant 0$ 及 $c\geqslant 0$,使得

$$|f(t)|\leqslant Me^{ct},\quad t\in(0,+\infty).$$

则

(1) 在半平面 $\mathrm{Re}p>c$ 内 $F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$存在,且 $F(p)$是 $\mathrm{Re}p>c$ 内的解析函数(即 $F'(p)$在 $\mathrm{Re}p>c$ 内处处存在).

(2) 在 $\mathrm{Re}p>c$ 内 Laplace 逆变换存在,且反演公式

$$\mathscr{L}^{-1}[F(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(p)e^{pt}dp$$

成立.

证明略.

例 12.7 求下列函数的 Laplace 变换:

(1) 单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geqslant 0\end{cases}$;

(2) e^{kt}, $\sin kt$, $\cos kt$, $k\in\mathbb{R}$.

解

(1) $\mathscr{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} 1\cdot e^{-pt}dt = \frac{-1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$, $(\mathrm{Re}p>0)$.

显然 $\mathscr{L}[1]=\frac{1}{p}$.

(2) $\mathscr{L}[e^{kt}] = \int_0^{+\infty} e^{kt}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-k)t}dt$

$$= \frac{1}{p-k}, \quad (\mathrm{Re}p > k).$$

$$\mathscr{L}[\sin kt] = \int_0^{+\infty} \sin kt \cdot e^{-pt}dt$$

$$= \frac{e^{-pt}(-p\sin kt - k\cos kt)}{p^2+k^2}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{k}{p^2+k^2}, \quad (\mathrm{Re}p > 0).$$

同理可得

$$\mathscr{L}[\cos kt] = \frac{p}{p^2+k^2}, \quad (\mathrm{Re}p > 0).$$

Laplace 变换及其逆变换具有下列性质(假定所涉及的变换都存在且记 $\mathscr{L}[f(t)]=F(p)$).

性质 1(线性性质) $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}^{-1}$都是线性变换.

性质 2(微分性质) $\mathscr{L}[f'(t)]=pF(p)-f(0)$.

推论 $\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$.

性质 3(积分性质) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{p}F(p)$.

推论 $\mathscr{L}\left[\underbrace{\int_0^t dt\int_0^t dt\cdots\int_0^t}_{n\text{次}} f(t)dt\right]=\frac{1}{p^n}F(p)$.

性质 4(位移性质) $\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=F(p-a)$ $(\mathrm{Re}(p-a)>c)$.

性质 5(延迟性质) $\mathscr{L}[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}F(p)$,或

$\mathscr{L}^{-1}[e^{-p\tau}F(p)]=f(t-\tau)$.

性质 6(相似性质) $\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$ ($a>0$ 为常数).

性质 7(卷积定理) $\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(p)\cdot F_2(p)$,或

$\mathscr{L}^{-1}[F_1(p)\cdot F_2(p)]=f_1(t)*f_2(t)$,

其中卷积 $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$,显然有 $f_1*f_2=f_2*f_1$.

证 这些性质的证明,有的比较简单,有的与 Fourier 变换的对应性质类似,作为例子我们证明性质 3 和性质 7.

性质 3 的证明:记 $h(t)=\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$,则 $h(0)=0,h'(t)=f(t)$.由性质 2 知

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\\&=\mathscr{L}[h'(t)]\\&=p\mathscr{L}[h(t)]-h(0)\\&=p\mathscr{L}[h(t)],\end{aligned}$$

所以

$$\mathscr{L}[h(t)]=\frac{1}{p}\mathscr{L}[h'(t)],$$即

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{p}\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{p}F(p).$$

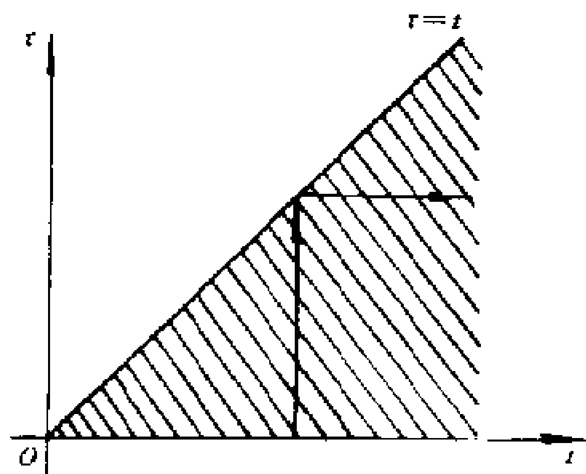


图 12-9

性质 7 的证明:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f_1*f_2]&=\int_0^{+\infty}[f_1(t)*f_2(t)]\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau\\&\xlongequal{t-\tau=u}\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\left[\mathrm{e}^{-p\tau}\int_0^{+\infty}f_2(u)\mathrm{e}^{-pu}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau\right) F_2(p)$$

$$= F_1(p) \cdot F_2(p).$$

证毕.

例 12.8 求 $\mathscr{L}[t^m]$, $\mathscr{L}[e^{at}t^m]$, $m \in \mathbb{N}$ 及 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2(p+1)}\right]$.

解 设 $f(t) = t^m$, $m \in \mathbb{N}$. 则

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-1)}(0) = 0, f^{(m)}(t) = m!$$

因为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[m!] &= \mathscr{L}[f^{(m)}(t)] \\ &= p^m \mathscr{L}[f(t)] - p^{m-1} f(0) - \cdots - f^{(m-1)}(0) \\ &= p^m \mathscr{L}[f(t)],\end{aligned}$$

所以

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{p^m}\mathscr{L}[m!] = \frac{m!}{p^m}\mathscr{L}[1] = \frac{m!}{p^m}\frac{1}{p},$$

即

$$\mathscr{L}[t^m] = \frac{m!}{p^{m+1}}, \quad m = 0,1,2,\cdots.$$

由位移性质知

$$\mathscr{L}[e^{at}t^m] = \frac{m!}{(p-a)^{m+1}}.$$

下面求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2(p+1)}\right]$:

因为

$$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1},$$

所以由性质 1 得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p+1)}\right] = -\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]$$

$$= -1 + t + e^{-t}.$$

也可用卷积定理求

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p+1}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]*\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]=t*\mathrm{e}^{-t}$$

$$=\int_0^t \tau\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=t-1+\mathrm{e}^{-t}.$$

熟悉留数的读者,也可根据下面的公式求 Laplace 逆变换:

设 $F(p)$ 的所有奇点 $p_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都分布在 $\mathrm{Re}\,p<\beta$ 的范围内,且当 $p\to\infty$ 时 $F(p)\to 0$,则

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}[F(p)\cdot\mathrm{e}^{pt}]\quad(t>0).$$

证明从略,在多数情况下,Laplace 变换和逆变换可通过查表求得.

四、定解问题的积分变换解法

由 Fourier 变换和 Laplace 变换的微分性质可知,一个函数的导函数可以用它的象函数来表示.于是通过积分变换,可以将未知函数的常微分方程化成其象函数的代数方程,而把含两个自变量的偏微分方程化为含一个参量的常微分方程.总之,通过积分变换可以减少微分方程的自变量的个数,使得求解变得容易些.下面举例说明定解问题的积分变换解法.

例 12.9 求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases}y''+2y'-3y=\mathrm{e}^{-t}\\ y|_{t=0}=0,\ y'|_{t=0}=1\end{cases}.$$

解 记 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(p)$. 将方程两边取 Laplace 变换,并考虑到初始条件,得

$$p^2Y(p)-1+2pY(p)-3Y(p)=\frac{1}{p+1}.$$

解之得

$$Y(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+3)}$$

$$=\frac{3}{8}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{p+1}-\frac{1}{8}\frac{1}{p+3}.$$

所以此初值问题的解为

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(p)] = \frac{3}{8}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{8}e^{-3t}.$$

在§11.2中用固有函数法求解非齐次方程的定解问题时，出现的常微分方程初值问题

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n \end{cases} \qquad n = 1,2,\cdots$$

可用 Laplace 变换求解如下：

记 $\mathscr{L}[T_n(t)] = \tilde{T}_n(p)$，$\mathscr{L}[f_n(t)] = F_n(p)$. 将方程两边取 Laplace 变换并考虑初始条件得

$$p^2\tilde{T}_n(p) - p\varphi_n - \psi_n + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \tilde{T}_n(p) = F_n(p).$$

解之得

$$\begin{aligned}\tilde{T}n(p) &= \frac{F_n(p) + \varphi_n p + \psi_n}{p^2 + (n\pi a/l)^2} \\ &= \frac{l}{n\pi a}F_n(p) \cdot \frac{n\pi a/l}{p^2 + (n\pi a/l)^2} + \varphi_n \cdot \frac{p}{p^2 + (n\pi a/l)^2} \\ &\quad + \frac{l}{n\pi a}\psi_n \cdot \frac{n\pi a/l}{p^2 + (n\pi a/l)^2}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}T_n(t) &= \frac{l}{n\pi a}f(t) * \sin\frac{n\pi at}{l} + \varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi at}{l} \\ &= \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau + \varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l} \\ &\quad + \frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi at}{l}, \quad n = 1,2,\cdots.\end{aligned}$$

例 12.10　用 Fourier 变换求解弦振动的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < -\infty, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解 对方程及初始条件两端取关于 x 的 Fourier 变换，并记

$$\mathscr{F}[u(x,t)] = \tilde{u}(\omega,t),\quad \mathscr{F}[\varphi(x)] = \tilde{\varphi}(\omega),\text{即}$$

$$\tilde{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x,\quad \tilde{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x,$$

显然 $\tilde{u}(\omega,0)=\tilde{\varphi}(\omega)$.

利用微分性质得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{u}(\omega,t)}{\mathrm{d}t^2} = -a^2\omega^2\tilde{u}(\omega,t) \\ \tilde{u}\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\omega),\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

这是一个带参量 ω 的常微分方程初值问题，容易求得它的解为

$$\tilde{u}(\omega,t) = \tilde{\varphi}(\omega)\cos a\omega t.$$

所以原定解问题的解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}[\tilde{u}(\omega,t)] = \mathscr{F}^{-1}[\tilde{\varphi}(\omega)\cos a\omega t] \\ &= \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{ia\omega t} + \mathrm{e}^{-ia\omega t}}{2}\tilde{\varphi}(\omega)\right] \\ &= \frac{1}{2}\{\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{iat\omega}\tilde{\varphi}(\omega)] + \mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-iat\omega}\tilde{\varphi}(\omega)]\} \\ &= \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)]. \end{aligned}$$

例 12.11 解无界杆上的热传导问题

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}.$$

解 记 $U(\omega,t)=\mathscr{F}[u(x,t)]$，$\Phi(\omega)=\mathscr{F}[\varphi(x)]$，$F(\omega,t)=\mathscr{F}[f(x,t)]$. 对方程及初始条件两端取关于 x 的 Fourier 变换得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U(\omega,t)}{\mathrm{d}t} + a^2\omega^2U(\omega,t) = F(\omega,t) \\ U(\omega,0) = \Phi(\omega) \end{cases}.$$

解之得

$$U(\omega,t)=\Phi(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}+\int_0^t F(\omega,\tau)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

故

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=\mathscr{F}^{-1}[U(\omega,t)]\\
&=\mathscr{F}^{-1}\left[\Phi(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}\right]+\mathscr{F}^{-1}\left[\int_0^t F(\omega,\tau)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\\
&=\varphi(x)*\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}]+\int_0^t \mathscr{F}^{-1}[F(\omega,\tau)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\tau)}]\mathrm{d}\tau\\
&=\varphi(x)*\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}]-\int_0^t f(x,\tau)*\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\tau)}]\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

查表得

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2 t\omega^2}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/4a^2 t},$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2(t-\tau)\omega^2}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-x^2/4a^2(t-\tau)}.$$

所以原定解问题的解

$$\begin{aligned}
u(x,t)=&\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4a^2 t}\mathrm{d}\xi\\
&+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

例 12.12　求解半无界杆的热传导问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<+\infty,\ t>0\\ u|_{t=0}=0\\ u|_{x=0}=\varphi(t), & u(x,t)\ \text{有界}\end{cases}.$$

解　因 x 和 t 均在 $[0,+\infty)$ 上取值，故不能采用 Fourier 变换求解，我们采用 Laplace 变换法. 注意方程中含有 u_{xx} 项，但在 $x=0$ 处却未给出 u_x 的值，因此不能对 u 取关于 x 的 Laplace 变换. 将方程及边界条件取关于 t 的 Laplace 变换，并利用初始条件(记 $U(x,p)=\mathscr{L}[u(x,t)]$，$\Phi(p)=\mathscr{L}[\varphi(t)]$)得

$$\begin{cases}\dfrac{d^2U(x,p)}{dx^2}-\dfrac{p}{a^2}U(x,p)=0\\ U(0,p)=\Phi(p),\ U(x,p)\text{有界}\end{cases},$$

解得

$$U(x,p)=\Phi(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

故

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}[\Phi(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]$$
$$=\varphi(t)*\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}].$$

查表可得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-y^2}dy,$$

注意，当 $t=0$ 时，这个积分等于零，由微分性质得

$$\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]=\mathscr{L}^{-1}[p\cdot\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-y^2}dy\right)$$
$$=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-x^2/4a^2t},$$

所以

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\varphi(\tau)\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}d\tau.$$

例 12.13　解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=x^2y,\quad 0<y<+\infty\\ u|_{y=0}=x^2\\ u|_{x=1}=\cos y\end{cases}$$

解　将方程取关于 y 的 Laplace 变换，记 $U(x,p)=\mathscr{L}[u(x,y)]$得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[pU(x,p)-x^2]=x^2\cdot\frac{1}{p^2}.$$

将条件 $u|_{x=1}=\cos y$ 取关于 y 的 Laplace 变换得

$$U|_{x=1}=\frac{p}{p^2+1},$$

于是有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{2x}{p}\\ U|_{x=1}=\dfrac{p}{p^2+1}\end{cases}.$$

解得

$$U(x,p)=\frac{1}{3p^3}x^3+\frac{1}{p}x^2+\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{3p^3}-\frac{1}{p}.$$

所以

$$u(x,y)=\frac{1}{6}x^3y^2+x^2+\cos y-\frac{1}{6}y^2-1.$$

§12.3 Green 函数法

本节先通过 Green 公式给出调和函数的性质，然后建立 Green 函数概念并导出 Laplace 方程第一边值问题的解的积分表达式.

一、调和函数的性质

在区域 Ω 内具有二阶连续偏导数，且满足 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 的函数 u 叫做 Ω 内的**调和函数**. 求解 Laplace 方程的定解问题，就是在区域 Ω 内寻找一个调和函数，它在边界 S 上的值(或法向导数值)为已知. 为导出调和函数的积分表达式，先证明 Green 公式.

设 Ω 是由足够光滑的闭曲面 S 所围成的有界域. $P(x,y,z)$，

$Q(x,y,z),R(x,y,z)$是在 $\Omega+S$ 上连续、在 Ω 内具有连续的一阶偏导数的任意函数，则 Gauss 公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

$$=\oint\!\!\!\oint_{S}[P\cos(n,x)+Q\cos(n,y)+R\cos(n,z)]\mathrm{d}S$$

成立，其中 $\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法向量.

设 $u(x,y,z),v(x,y,z)$在 $\Omega+S$ 上有连续的一阶偏导数，在 Ω 内有连续的二阶偏导数. 在 Gauss 公式中，令

$$P=u\frac{\partial v}{\partial x},\quad Q=u\frac{\partial v}{\partial y},\quad R=u\frac{\partial v}{\partial z},$$

得

$$\iiint_{\Omega}\left[u\cdot\Delta v+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]\mathrm{d}V=\oint\!\!\!\oint_{S}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S,$$

于是有

$$\iiint_{\Omega}(u\cdot\Delta v)\mathrm{d}V=\oint\!\!\!\oint_{S}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}(\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v)\mathrm{d}V,\quad(12.21)$$

显然交换 u 与 v 的位置，上式仍成立

$$\iiint_{\Omega}(v\cdot\Delta u)\mathrm{d}V=\oint\!\!\!\oint_{S}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}(\mathrm{grad}v\cdot\mathrm{grad}u)\mathrm{d}V.\quad(12.21')$$

(12.21)式称为 **Green 第一公式**.

(12.21)式减去(12.21′)式得

$$\iiint_{\Omega}[u\Delta v-v\Delta u]\mathrm{d}V=\oint\!\!\!\oint_{S}\left[u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S,\quad(12.22)$$

称(12.22)式为 **Green 第二公式**.

利用 Green 公式可以导出调和函数的一些基本性质.

(1) 调和函数的积分表达式

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$是 Ω 内任一点，容易验证函数

$$v(x,y,z)=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

除在 M_0 点外处处满足 Laplace 方程，即

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0.$$

函数$\frac{1}{r}$在研究三维 Laplace 方程中，有着重要作用，称$\frac{1}{r}$为三维 Laplace 方程的**基本解**.

设 u 是满足 Green 公式条件的任一函数，取 $v=\frac{1}{r}$. 由于 v 在 Ω 内有奇点 M_0，故不满足 Green 公式的条件，为此作球面 $S_\varepsilon=S(M_0,\varepsilon)(\varepsilon>0$ 充分小$)$，S_ε 所围球体记为 B_ε. 于是在复连域 $\Omega\backslash B_\varepsilon$ 上，u 和 v 都满足 Green 公式的条件，故由 Green 第二公式得

$$\iiint\limits_{\Omega\backslash B_\varepsilon}\left[u\Delta\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\Delta u\right]\mathrm{d}V=\oiint\limits_{S+S_\varepsilon}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$$

即

$$-\iiint\limits_{\Omega\backslash B_\varepsilon}\frac{1}{r}\Delta u\mathrm{d}V=\oiint\limits_{S}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$$
$$-\oiint\limits_{S_\varepsilon}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S.\quad(12.23)$$

因为在球面 S_ε 上，

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}r}=\frac{-1}{r^2}=\frac{-1}{\varepsilon^2},$$

故

$$\oiint\limits_{S_\varepsilon}u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\mathrm{d}S=\frac{-1}{\varepsilon^2}\oiint\limits_{S_\varepsilon}u\mathrm{d}S=\frac{-1}{\varepsilon^2}u(\overline{M})4\pi\varepsilon^2$$
$$=-4\pi u(\overline{M}).$$

其中$\overline{M}$为 S_ε 上的某一点.

同理可得

$$\oiint_{S_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon}\oiint_{S_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon}4\pi\varepsilon^2\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\overline{M}_1}$$

$$= 4\pi\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\overline{M}_1},$$

其中$\overline{M}_1$ 是 S_ε 上某一点.

又因为 u 是连续的,$\frac{\partial u}{\partial n}$是有界的,故有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(\overline{M}) = u(M_0),\ \lim_{\varepsilon\to 0} 4\pi\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\overline{M}_1} = 0,$$

显然$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\Omega\backslash B_\varepsilon)=\Omega$,所以在(12.23)式中令 $\varepsilon\to 0$ 取极限得

$$-\iiint_\Omega \frac{1}{r}\Delta u\mathrm{d}V = \oiint_S\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S + 4\pi u(M_0),\text{即}$$

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\oiint_S\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S - \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{1}{r}\Delta u\mathrm{d}V.$$

为明确起见,将 Ω 内任一点 M 与 M_0 之间的距离记为 r_{M_0M}.

若 u 是 Poisson 方程的解,即 $\Delta u=\Phi$,则上式化为

$$u(M_0) = \frac{-1}{4\pi}\oiint_S\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right) - \frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\Phi}{r_{M_0M}}\mathrm{d}V. \qquad (12.24)$$

若 u 是调和函数,即 $\Delta u=0$,则有

$$u(M_0) = \frac{-1}{4\pi}\oiint_S\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right) - \frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S, \quad (12.25)$$

此式称为**调和函数的积分表达式**.这表明,对于在 $\Omega+S$ 上有连续一阶偏导数的调和函数 u,它在 Ω 内任意一点 M_0 处的值,都可以通过积分表示式(12.25),用它在边界曲面 S 上的值及其在 S 上的法向导数值来表示.

(2) 调和函数的法向导数沿区域边界曲面的积分为零，即

$$\oiint_S \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S = 0. \tag{12.26}$$

证 在(12.22)式中，取 u 为调和函数，取 $v=1$ 即得.

(3) 调和函数的平均值定理

调和函数在球心处的值等于它在球面上的平均值，即

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint_{S_R} u \mathrm{d}S, \tag{12.27}$$

其中 $S_R=S(M_0,R)\subset\Omega$.

证 只要在(12.25)式中取 $S=S_R$，则 $r_{M_0M}=R$，而 $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)=-\frac{1}{R^2}$，并利用(12.26)式即得.

利用平均值定理还可证明下面的定理.

(4) 调和函数的极值原理

若 u 在 Ω 内是调和函数且不为常数，在 $\Omega+S$ 上连续，则 u 的最大值和最小值只能在边界 S 上达到.(证略.)

由此可证明 Laplace 方程和 Poisson 方程的第一边值问题是适定的.

二、Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数

要由公式(12.25)求出 Laplace 方程 Dirichlet 问题的解，就必须消去未知的 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$，为此我们引入 Green 函数的概念.

在 Green 第二公式中，取 u,v 为 Ω 内的调和函数且在 $\Omega+S$ 上有连续的一阶偏导数，于是有

$$0 = \oiint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$

将(12.25)式减去上式，得

$$u(M_0) = \oiint_S \left\{u\left[\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\right] + \left(\frac{1}{4\pi r_{M_0M}} - v\right)\frac{\partial u}{\partial n}\right\}\mathrm{d}S.$$

为消去$\frac{\partial u}{\partial n}$，我们选取 $v=v(M,M_0)$为满足条件

$$v|_S=\left.\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}\right|_S$$

的调和函数，便有

$$\begin{aligned}u(M_0)&=\oiint\limits_S\left[u\left(\frac{\partial v}{\partial n}-\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}\right)\right]\mathrm{d}S\\&=-\oiint\limits_S u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}-v\right)\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

令 $G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}-v(M,M_0)$，则得

$$u(M_0)=-\oiint\limits_S u\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S. \tag{12.28}$$

显然 $G(M,M_0)$在$M\neq M_0$时，满足定解问题

$$(i)\begin{cases}\Delta G(M,M_0)=0, & M\in\Omega\setminus\{M_0\}\\ G(M,M_0)|_S=0\end{cases}$$

$G(M,M_0)$称为 Laplace 方程第一边值问题的 **Green 函数**.

如果已经求出了 Green 函数，则 Laplace 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u=0 & M\in\Omega\\ u|_S=f(M) & M\in S\end{cases}$$

的解为

$$u(M_0)=-\oiint\limits_S f(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\mathrm{d}S\quad(M_0\in\Omega). \tag{12.29}$$

类似地可得 Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u=\Phi(M) & M\in\Omega\\ u|_S=f(M) & M\in S\end{cases}$$

的解为

$$u(M_0)=-\oiint\limits_S f(M)\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint\limits_\Omega\Phi(M)G(M,M_0)\mathrm{d}V\quad(M_0\in\Omega). \tag{12.30}$$

这种通过 Green 函数来求解定解问题的方法叫做 **Green 函数法**. 由公式(12.29)和(12.30)知,这种方法的关键是求出 Green 函数 $G(M,M_0)$,这就必须求定解问题(i)的解. 由定解问题(i)知道,Green 函数仅依赖于区域 Ω 而与原问题中所给边界条件 f 无关. 因此,一旦求出某区域内的 Green 函数,也就解决了该区域上的 Dirichlet 问题.

对于某些特殊区域(如球、半空间等)内的 Green 函数,还可以借助物理的方法求得,事实上,Green 函数在静电学中有着明显的物理意义.

设 S 是导电的闭曲面,M_0是 S 所围成的空间域 Ω 内的任意一点,在 M_0 处放置一单位正电荷$+e$,则$+e$ 在 S 的内侧感应有一定分布密度的负电荷,而外侧分布有相应的正电荷. 将 S 接地,则外侧的正电荷消失,S 上的电势为零. 此时,Ω 内任一异于 M_0 的点 M 处的电势由两种电荷产生:一是由 M_0 处的

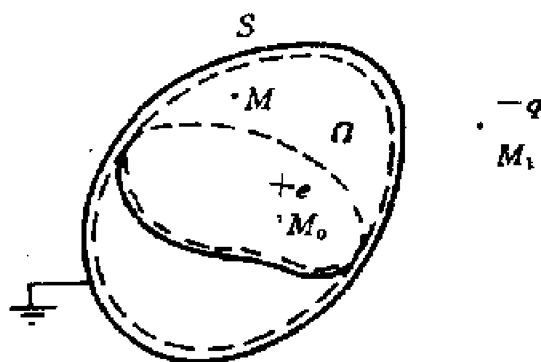


图 12-10

$+e$ 产生,其电势为$\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}$;另一是 S 内侧感应的负电荷产生的,其电势记为$-v$;因此 M 点的电势为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}-v.$$

当 $M\in S$ 时,由于 M 点处的电势为零,故有

$$G(M,M_0)|_S=0,$$

即

$$v|_S=\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}.$$

这表明 Green 函数 $G(M,M_0)$恰好描述了区域 Ω 上各点的电势.

为求感应电荷产生的电势 $-v$,在物理上常采用下面的“静电源像”法:将 $-v$ 想象为由域 Ω 外的某点 M_1 处的负电荷 $-q$ 产生的电势,这个电荷在 S 上产生的电势恰好抵消 M_0 点处 $+e$ 在 S 上产生的电势. 于是在 M_0 与 M_1 处两个点电荷 $+e$ 与 $-q$ 所形成的电场在 Ω 内的电势就是所求的 Green 函数,静电源像法也称为镜像法.

下面用静电源像法求几种特殊区域的 Green 函数,并给出 Dirichlet 问题的求解公式.

三、球域的 Green 函数和 Poisson 积分公式

设 $S=S(O,R)$,$M_0(x_0,y_0,z_0)$为球 $\Omega=B(O,R)$内任一点,记 $OM_0=\rho_0$. 在射线 OM_0 上找一点 M_1,使得

$$OM_0\cdot OM_1=R^2.$$

若记 $OM_1=\rho_1$,则有

$$\frac{\rho_0}{R}=\frac{R}{\rho_1}.$$

点 M_1 称为 M_0 关于球面 S 的反演点或共轭点. 在球面 S 上任取一点 P,则 $OP=R$. 由于

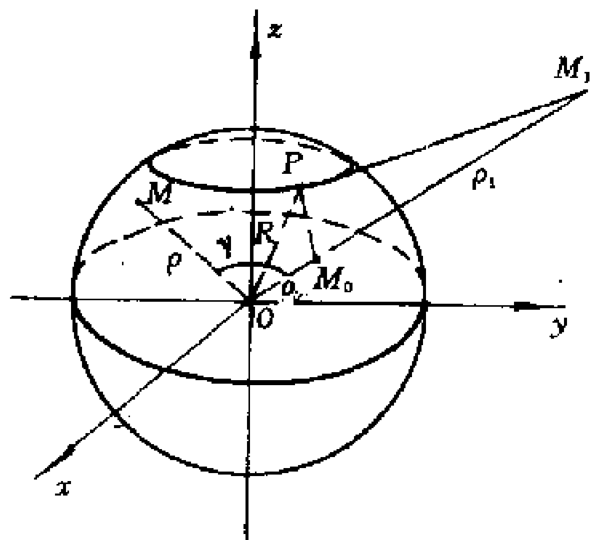


图 12-11

$$\Delta OPM_0\backsim\Delta OM_1P,$$

故

$$\frac{r_{PM_1}}{r_{PM_0}}=\frac{R}{\rho_0}.$$

若在 M_1 处放置一个电量为 $-\dfrac{R}{\rho_0}$的点电荷,则它在球内任一

点 M 处产生的电势为

$$-\frac{1}{4\pi r_{M_1M}}\frac{R}{\rho_0},$$

而在 S 上 P 点处产生的电势为

$$-\frac{1}{4\pi r_{PM_1}}\frac{R}{\rho_0}=-\frac{1}{4\pi r_{PM_0}},$$

这恰好抵消了 M_0 点单位正电荷在 P 点产生的电势. 因此球域的 Green 函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}-\frac{R}{\rho_0 r_{M_1M}}\right)\quad (M\in\Omega\backslash\{M_0\}).$$

若记 $OM=\rho$, OM_0 与 OM 的夹角为 γ, 则由余弦定理知

$$r_{M_0M}=\sqrt{\rho_0{}^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma},\ r_{M_1M}=\sqrt{\rho_1{}^2+\rho^2-2\rho_1\rho\cos\gamma},$$

故

$$\begin{aligned}G(M,M_0)&=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho_0{}^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma}}\right.\\&\qquad\left.-\frac{R}{\rho_0\sqrt{\rho_1{}^2+\rho^2-2\rho_1\rho\cos\gamma}}\right]\\&=\frac{1}{4\pi}[(\rho_0{}^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma)^{-1/2}\\&\qquad-R(R^4+\rho_0{}^2\rho^2-2R^2\rho\rho_0\cos\gamma)^{-1/2}].\end{aligned}$$

当 $M=P\in S$ 时, $\rho=OM=OP=R$, 因此

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\right|_S&=\left.\frac{\partial G}{\partial\rho}\right|_{\rho=R}\\&=-\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho_0{}^2}{(R^2+\rho_0{}^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}.\end{aligned}$$

将其代入公式(12.29)就得球域上 Laplace 方程 Dirichlet 问题的解

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\oiint_S \frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}f(P)\mathrm{d}S \quad (P\in S).$$

(12.31)

若采用球坐标系，记 $M_0=(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)\in\Omega$，$P=(R,\theta,\varphi)\in S$，而 $\mathrm{d}S=R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，则这个解可表示为

$$u(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\frac{(R^2-\rho_0^2)f(R,\theta,\varphi)\sin\theta}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}\mathrm{d}\theta\ ,$$

(12.31′)

其中

$$\cos\gamma=\cos\theta_0\cos\theta+\sin\theta_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_0).$$

公式(12.31)和(12.31′)称为球域上的 Poisson 积分公式.

将 G 和 $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S$ 代入公式(12.30)即得球域上 Poisson 方程 Dirichlet 问题的解

$$\begin{aligned}u(M_0)=&\frac{1}{4\pi R}\oiint_S \frac{(R^2-\rho_0^2)f(P)}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}\mathrm{d}S\\&+\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega\Big[\frac{R}{(R^4+\rho_0^2\rho^2-2R^2\rho_0\rho\cos\gamma)^{1/2}}\\&-\frac{1}{(\rho_{02}+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma)^{1/2}}\Big]\Phi(M)\mathrm{d}V.\end{aligned} \qquad (12.32)$$

四、解半空间上第一边值问题的 Green 函数法

设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x,y\in\mathbb{R},z>0\}$，这是一个无穷区域，除给出 u 在边界面 $z=0$ 上的值外，还需附加在无穷远处的条件

$$\lim_{M\to\infty}u(M)=\lim_{M\to\infty}u(x,y,z)=0.$$

即半空间 Ω 上的 Dirichlet 问题应描述为

$$\begin{cases}\Delta u=0\ (\text{或}\ \Delta u=\Phi(x,y,z)),\ z>0\\ u|_{z=0}=f(x,y)\\ \lim\limits_{M\to\infty}u(x,y,z)=0\end{cases}.$$

可以证明，其解仍然可以表示为(12.29)(或(12.30))的形式.

利用静电源象法，同样可求出半空间的 Green 函数. 在半空间 $z>0$ 内的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处放置单位正电荷，在 M_0 关于 $z=0$ 的对称点 $M_1(x_0,y_0,-z_0)$ 处放置单位负电荷，则它们产生的电势在平面 $z=0$ 上恰好互相抵消. 设 $M(x,y,z)$ 为半空间内任意一点，则 Green 函数为

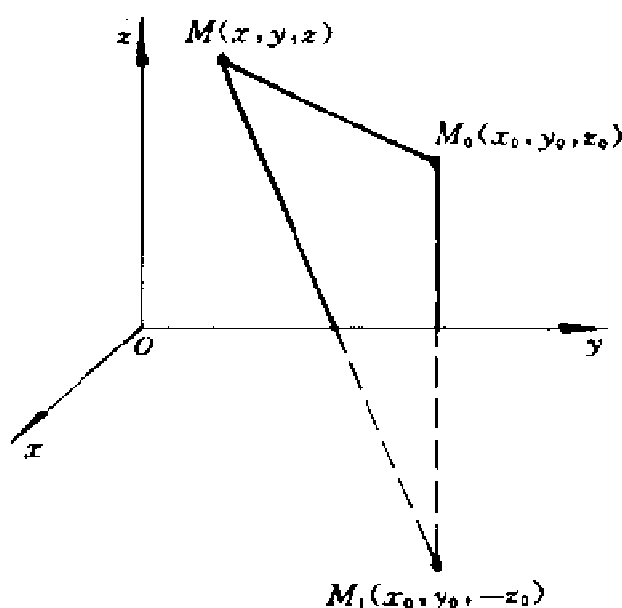


图 12-12

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}-\frac{1}{r_{M_1M}}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right].$$

此时

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}=-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}.$$

因此，半空间上 Laplace 方程 Dirichlet 问题的解为

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Poisson 方程 Dirichlet 问题的解为

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right]\Phi(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

五、二维情形

仿照三维空间的做法，可类似地讨论二维问题，下面只列出主要结果而略去推导过程.

设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是由足够光滑的平面曲线 L 所围的有界闭域.

在平面上，公式(12.22)成为

$$\iint\limits_D[u\Delta v-v\Delta u]\mathrm{d}\sigma=\oint\limits_L\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,\qquad(12.33)$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲线 L 的外法向量，L 取逆时针方向.

容易验证 $u=\ln\frac{1}{r}\left(r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$ 当 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时满足二维 Laplace 方程

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0.$$

函数 $\ln\frac{1}{r}$ 称为二维 Laplace 方程的基本解.

与三维情况类似，可得第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & M\in D\\ u|_L=f, & M\in L\end{cases}$$

的 Green 函数为

$$\begin{cases}G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{M_0M}}-v\right), & M\in D\\ G(M,M_0)=0, & M\in L\end{cases},$$

其中 v 为 D 内的调和函数.

相应于公式(12.29)和(12.30)有

$$u(M_0)=-\oint_L u\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s-\iint_D \Delta u G(M,M_0)\mathrm{d}\sigma \quad (M_0\in D). \qquad (12.34)$$

利用(12.34)可得到二维域 D 上的 Laplace 方程和 Poisson 方程第一边值问题解的积分表达式.

若 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<R^2\}$,则 D 上的 Green 函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{M_0M}}-\ln\left(\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{M_1M}}\right)\right],$$

其中 $M_0\in D$,M_1是 M_0关于圆周 $L:x^2+y^2=R^2$的反演点,M 为 D 内的动点.若记 $OM_0=\rho_0,OM_1=\rho_1=\frac{R^2}{\rho_0},OM=\rho,OM_0$与 OM 之间的夹角为 γ,则

$$\frac{1}{r_{M_0M}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma}},\ \frac{1}{r_{M_1M}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_1^2+\rho^2-2\rho_1\rho\cos\gamma}}.$$

于是

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_L=\left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=R}=\frac{-1}{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)},$$

其中 $\cos\gamma=\cos(\varphi-\varphi_0)$. 故由公式(12.34)可得在极坐标系下,圆域上 Laplace 方程 Dirichlet 问题的解为

$$u(\rho_0,\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)}f(\varphi)\mathrm{d}\varphi. \qquad (12.35)$$

由(12.34)也可写出圆域上 Poisson 方程 Dirichlet 问题解的积分表达式.

若 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$是上半平面,则定解问题

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in D\\ u|_{y=0}=f(x)\end{cases}$$

的解为

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi.$$

习 题 十 二

1. 求解下列定解问题.

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y \\ u|_{y=0} = x^2, \ u|_{x=1} = \cos y \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0 \\ u|_{y=0} = \sin x, \ u_y|_{y=0} = x \end{cases}$;

(提示:先求通解).

2. 求解下列定解问题.

(1) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} \cos x, & |x| \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin x, \ u_t|_{t=0} = x^2 \end{cases}$.

3. 求无界弦的自由振动规律,若此弦的初始位移为 $\varphi(x)$,初始速度为 $-a\varphi'(x)$.

4*. 试证定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

的求解公式是

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi;$$

并求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t\sin x, \quad -\infty < x < +\infty, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = \sin x \end{cases}.$$

5. 半无界弦的端点是自由的，初始位移为零，初始速度为 $\sin x$，求弦的自由振动规律.

6. 半无界弦的横振动由定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < +\infty,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0 \\ u_x|_{x=0} = A\sin\omega t \end{cases}$$

描述，求其振动规律.

7. 利用 Poisson 公式求解下列定解问题.

(1) $\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ t>0 \\ u|_{t=0}=x^3,\ u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}), & (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ t>0 \\ u|_{t=0}=x^2(x+y),\ u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$.

8. 用 Fourier 变换法推导一维波动方程 Cauchy 问题的 D'Alembert 公式.

9. 用积分变换法解下列定解问题.

(1) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty \\ u|_{x=0}=\varphi(y),\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,y)=0 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}-hu, & x>0,\ t>0 \\ u|_{x=0}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} u_x(x,t)=0 \\ u|_{t=0}=b \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} u_t=4u_{xx}, & 0<x<3,\ t>0 \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=3}=0 \\ u|_{t=0}=10\sin 2\pi x-6\sin 4\pi x \end{cases}$;

(4) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1, & x>0,\ y>0 \\ u|_{x=0}=y+1 \\ u|_{y=0}=1 \end{cases}$.

10. 证明公式(12.33).

11. 证明二维 Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数为

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{M_0M}} - v\right),$$

$M\neq M_0$，v 是调和函数.

12. 利用公式(12.35)求解圆域 $\rho\leqslant a$ 上的定解问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & \rho < a \\ u|_{\rho=a} = A\cos\varphi\end{cases}.$$

13. 证明半平面 $y>0$上定解问题

$$\begin{cases}u_{xx} + u_{yy} = 0, & y > 0 \\ u|_{y=0} = f(x)\end{cases}$$

的解的积分表达式为

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{y^2 + (\xi - x)^2}\mathrm{d}\xi .$$

第十三章　偏微分方程的数值解法

前面两章介绍了几种典型偏微分方程定解问题解析解的求法. 这些方法无疑是非常重要的. 特别是对某些典型问题的理论分析起着极为重要的作用. 然而，在科学研究与工程技术中所出现的偏微分方程定解问题，大都很难求出解析解. 本章将结合几种典型定解问题介绍数值解法，其中包括差分法和有限元法. 本章所讨论的定解问题总假定其为适定的.

§13.1　椭圆型方程的差分解法

一、差分格式的构成

考虑 Poisson 方程第一边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), \quad (x,y)\in D & (13.1)\\ u|_\Gamma=\varphi(x,y) & (13.2)\end{cases}$$

其中 D 是 xy 平面上的有界区域，其边界 Γ 是分段光滑曲线.

为了把定解问题离散化，首先对区域 D 进行网格剖分. 在 xy 平面上引进两族平行直线

$$x=x_i=x_0+ih_1, \quad i=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

$$y=y_j=y_0+jh_2, \quad j=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

称为**网格线**. 其中(x_0,y_0)是 xy 平面上一定点，$h_1,h_2>0$分别是沿 x 轴和 y 轴方向的步长. 两族直线的交点(x_i,y_j)称为**网点**或**节点**. 位于 D 内部的节点称为**内节点**. 若内节点(x_i,y_j)的四个相邻节点也都是内节点，则称(x_i,y_j)为**正则内点**. 否则称(x_i,y_j)为非正则内点. 网格线与边界 Γ 的交点称为**边界节点**，或简称**界点**. 在图

13-1中，“∘”表示正则内点，“×”表示非正则内点，“•”表示界点. 内节点的集合记为 D_0，正则内点集合与非正则内点集合分别记为 D_1 和 D_2，界点集合记为 Γ_0. 我们的任务是求边值问题(13.1)～(13.2)的解 $u(x,y)$ 在所有内节点处的近似值. 用 u_{ij} 表示 $u(x_i,y_j)$ 的近似值.

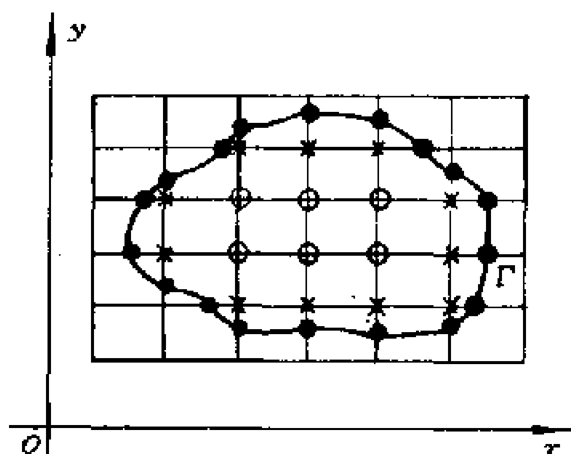


图 13-1

设内节点总数为 N. 为了确定所有内节点处的 u_{ij}，需建立 N 个代数方程. 对每一个 $(x_i,y_j)\in D_1$，利用数值微分公式有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2}=&\frac{1}{h_1^2}[u(x_{i+1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i-1},y_j)]\\&-\frac{1}{12}h_1^2\frac{\partial^4 u(\xi_i,y_j)}{\partial x^4},\quad \xi_i\in(x_{i-1},x_{i+1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2}=&\frac{1}{h_2^2}[u(x_i,y_{j+1})-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j-1})]\\&-\frac{1}{12}h_2^2\frac{\partial^4 u(x_i,\eta_j)}{\partial y^4},\quad \eta_j\in(y_{j-1},y_{j+1}).\end{aligned}$$

代入方程(13.1)得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h_1^2}[u(x_{i+1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i-1},y_j)]\\&+\frac{1}{h_2^2}[u(x_i,y_{j+1})-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j-1})]\\&=f(x_i,y_j)+R_{ij},\end{aligned}\tag{13.3}$$

其中

$$R_{ij}=\frac{1}{12}h_1^2\frac{\partial^4 u(\xi_i,y_j)}{\partial x^4}+\frac{1}{12}h_2^2\frac{\partial^4 u(x_i,\eta_j)}{\partial y^4}=O(h^2),$$

此处 $h=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$. 略去余项 R_{ij}，记 $f_{ij}=f(x_i,y_j)$. 用 u_{ij} 代替 $u(x_i,y_j)$，得差分方程

$$\frac{1}{h_1^2}(u_{(i+1)j}-2u_{ij}+u_{(i-1)j})+\frac{1}{h_2^2}(u_{i(j+1)}-2u_{ij}+u_{i(j-1)})$$
$$=f_{ij}. \tag{13.4}$$

R_{ij} 称为差分方程(13.4)逼近 Poisson 方程(13.1)的截断误差，或称为逼近误差.

用差分方程(13.4)近似 Poisson 方程(13.1)，实际上是用 u 在点 (x_i,y_j) 及其上、下、左、右四个邻点上值的线性组合近似代替 $\Delta u(x_i,y_j)$. 因此称(13.4)为**五点菱形格式**.

对于每一个正则内点，可由(13.4)式建立一个方程，而未知量个数等于全部内节点的个数，因此尚需对每个非正则内点再建立一个方程，为了避免引进不必要的新未知量，需要借助边界条件加以处理，通常可用下面介绍的方法.

1. 直接迁移法

对于点 $(x_i,y_j)\in D_2$，取距 (x_i,y_j) 最近的 Γ_0 中的点，记为 $(\bar{x}_i,\bar{y}_j)$，令

$$u_{ij}=\varphi(\bar{x}_i,\bar{y}_j). \tag{13.5}$$

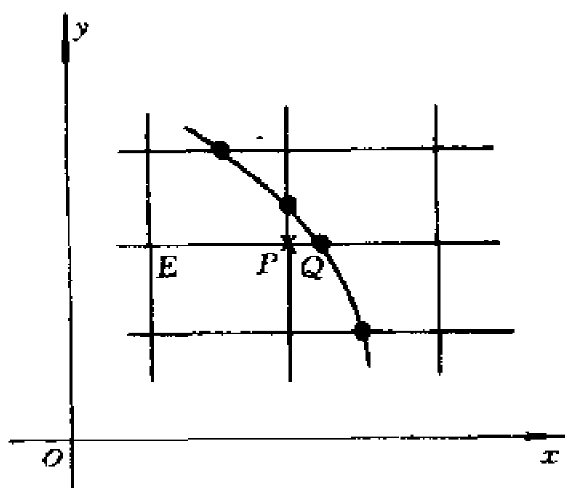


图 13-2

于是，(13.4)和(13.5)构成含有 N 个未知量和 N 个方程的线性方程组.

2. 线性插值法

对于点 $P(x_i,y_j)\in D_2$，沿 x 轴方向或沿 y 轴方向作线性插值. 如图13-2，若沿 x 轴方向插值，得差分方程

$$\frac{1}{h_1 + h_Q}(h_Q u_E + h_1 u_Q) - u_{ij} = 0, \tag{13.6}$$

其中 h_Q 为点 Q 与点 P 间的距离. 线性插值的误差为

$$\widetilde{R}_{ij} = \frac{1}{2} h_1 h_Q \frac{\partial^2 u(\xi_i, y_j)}{\partial x^2} = O(h^2),$$

其中 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. (13.4)与(13.6)组成含有 N 个未知量和 N 个方程的线性方程组.

3. 矩形域上的差分格式

许多实际问题中，区域 D 是矩形域

$$D = \{(x,y) \mid x \in (a,b), y \in (c,d)\}.$$

取步长 $h_1 = \frac{b-a}{n}$, $h_2 = \frac{d-c}{m}$, 作两族平等直线

$x_i = a + ih_1$, $i = 0, 1, \cdots, n$,

$y_j = c + jh_2$, $j = 0, 1, \cdots, m$,

把 D 剖分如图13-3所示. 对每个内节点都视为正则点，利用(13.4)式得差分方程

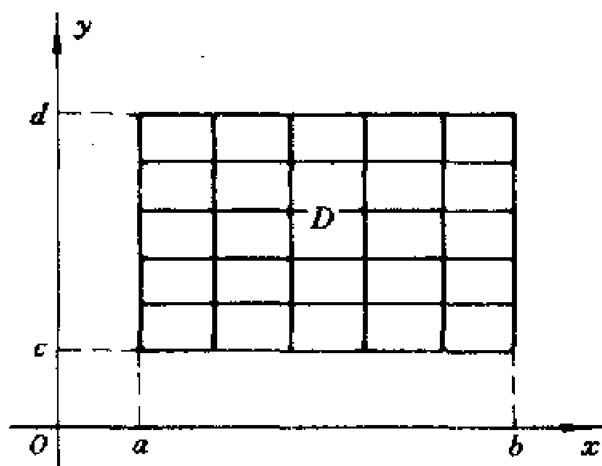


图 13-3

$$\begin{cases} \frac{1}{h_1^2}(u_{(i+1)j} - 2u_{ij} + u_{(i-1)j}) + \frac{1}{h_2^2}(u_{i(j+1)} \\ \quad - 2u_{ij} + u_{i(j-1)}) = f_{ij}, \quad (x_i, y_j) \in D_0 \\ u_{ij} = \varphi(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Gamma_0 \end{cases} \tag{13.7}$$

特别地，当 $h_1 = h_2$，即取正方形网格时，差分方程为

$$\begin{cases} 4u_{ij} - (u_{(i+1)j} + u_{(i-1)j} + u_{i(j+1)} + u_{i(j-1)}) \\ \quad = -h^2 f_{ij}, \quad (x_i, y_j) \in D_0 \\ u_{ij} = \varphi(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Gamma_0 \end{cases} \tag{13.8}$$

二、差分方程解的存在唯一性

下面仅讨论差分方程(13.4)与(13.6)解的存在唯一性，其方法和结论也适用于差分方程(13.4)与(13.5)和(13.4)与(13.7).

为简便起见，引进差分算子

$$L(u_{ij})=\begin{cases}\dfrac{1}{h_1^2}(u_{(i+1)j}-2u_{ij}+u_{(i-1)j})+\dfrac{1}{h_2^2}(u_{i(j+1)}-2u_{ij}\\ \quad +u_{i(j-1)}), \qquad (x_i,y_j)\in D_1\\ \dfrac{1}{h_1+h_Q}(h_Q u_E+h_1 u_Q)-u_{ij}\\ \qquad\qquad (x_i,y_j)\in D_2, Q\in \Gamma_0, E\in D_0\end{cases},$$

及函数

$$g_{ij}=\begin{cases}f_{ij}, & (x_i,y_j)\in D_1\\ 0, & (x_i,y_j)\in D_2\end{cases}$$

于是，差分方程(13.4)与(13.6)可简记为

$$\begin{cases}L(u_{ij})=g_{ij}, & (x_i,y_j)\in D_0\\ u_Q=\varphi(Q), & Q\in\Gamma_0\end{cases} \tag{13.9}$$

首先介绍差分算子 $L(u_{ij})$ 的极值原理.

定理 13.1　设 u_{ij}是定义在 $D_0\cup\Gamma_0$上的一组值.

(1) 若在 D_1上 $L(u_{ij})\geqslant 0$，则$\max\limits_{D_1}u_{ij}\leqslant\max\limits_{D_2}u_{ij}$；若在 D_0上$L(u_{ij})\geqslant 0$，则$\max\limits_{D_0}u_{ij}\leqslant\max\limits_{\Gamma_0}u_{ij}$.

(2) 若在 D_1上 $L(u_{ij})\leqslant 0$，则$\min\limits_{D_1}u_{ij}\geqslant\min\limits_{D_2}u_{ij}$；若在 D_0上$L(u_{ij})\leqslant 0$，则$\min\limits_{D_0}u_{ij}\geqslant\min\limits_{\Gamma_0}u_{ij}$.

证　只证(1).(2)的证明与其类似.对任意$(x_i,y_j)\in D_1$，由 $L(u_{ij})\geqslant 0$，必有

$$u_{ij}\leqslant \max\{u_{(i+1)j}, u_{(i-1)j}, u_{i(j+1)}, u_{i(j-1)}\}. \tag{13.10}$$

事实上，如若不然，则由 $L(u_{ij})$的定义得到

$$L(u_{ij}) < \frac{1}{h_1^2}(u_{ij} - 2u_{ij} + u_{ij}) + \frac{1}{h_2^2}(u_{ij} - 2u_{ij} + u_{ij}) = 0$$

这与 $L(u_{ij}) \geqslant 0$ 矛盾. (13.10)式说明, D_1 中任意点处 u_{ij} 的值都不大于四个相邻节点处 u_{ij} 的最大值. 因此

$$\max_{D_1} u_{ij} \leqslant \max_{D_2} u_{ij}.$$

假设 $\max\limits_{D_2} u_{ij} = M > \max\limits_{\Gamma_0} u_{ij}$. 由已证明的结论知 $\max\limits_{D_1} u_{ij} \leqslant M$. 设在 $(x_{i_0}, y_{j_0}) \in D_2$ 处, $u_{i_0 j_0} = M$, 则

$$L(u_{i_0 j_0}) < \frac{1}{h_1 + h_Q}(h_Q M + h_1 M) - M = 0.$$

这与 $L(u_{i_0 j_0}) \geqslant 0$ 矛盾. 因此

$$\max_{D_2} u_{ij}^* \leqslant \max_{\Gamma_0} u_{ij}.$$

证毕.

定理 13.2 差分方程(13.9)的解存在且唯一.

证 只需证明对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} L(u_{ij}) = 0, & (x_i, y_j) \in D_0 \\ u_{ij} = 0, & (x_i, y_j) \in \Gamma_0 \end{cases}$$

只有零解. 因为在 D_0 上 $L(u_{ij}) = 0$, 所以由定理13.1可知, 在 D_0 上

$$\min_{\Gamma_0} u_{ij} \leqslant u_{ij} \leqslant \max_{\Gamma_0} u_{ij}.$$

而在 Γ_0 上 $u_{ij} = 0$, 从而在 D_0 上 $u_{ij} = 0$. 证毕.

例 13.1 解 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 0.5, \quad 0 < y < 0.5 \\ u(0, y) = u(x, 0) = 0 \\ u(x, 0.5) = 200x \\ u(0.5, y) = 200y \end{cases}$$

解 取 $h_1 = h_2 = 0.125$, 采用正方形网格剖分. 将内节点按图13-4所示编号, 按(13.8)式得差分方程

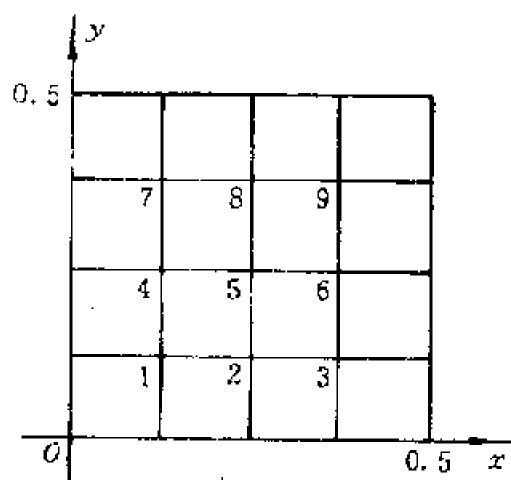


图 13-4

$$
\begin{cases}
4u_1-u_2-u_4=0\\
4u_2-u_1-u_3-u_5=0\\
4u_3-u_2-u_6=25\\
4u_4-u_1-u_5-u_7=0\\
4u_5-u_2-u_4-u_6-u_8=0\\
4u_6-u_3-u_5-u_9=50\\
4u_7-u_4-u_8=25\\
4u_8-u_5-u_7-u_9=50\\
4u_9-u_6-u_8=150.
\end{cases}
$$

写成矩阵形式为

$$
\begin{bmatrix}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ u_6\\ u_7\\ u_8\\ u_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 25\\ 0\\ 0\\ 50\\ 25\\ 50\\ 150 \end{bmatrix}. \tag{13.11}
$$

用 Seidel 迭代法求解得

$u_1=6.25$， $u_2=12.50$，$u_3=18.75$，$u_4=12.50$，

$u_5=25.00$，$u_6=37.50$，$u_7=18.75$，$u_8=37.50$，

$u_9=56.25$.

若记

$$
A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},
$$

则方程组(13.11)的系数矩阵可写成

$$\begin{bmatrix} A & C & 0 \\ C & A & C \\ 0 & C & A \end{bmatrix}.$$

实际上,方程组(13.8)的系数矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} A & C & & & \\ C & A & C & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & C & A & C \\ & & & C & A \end{bmatrix},$$

其中 A 和 C 均为 $n-1$阶方阵,而 T 为$(n-1)(m-1)$阶方阵,称为三对角分块矩阵. 与三对角矩阵一样,以 T 为系数矩阵的线性方程组也可用形式上完全一样的追赶法求解. 对于实际问题,为了保证数值解的精度,往往需要取比较多的节点,差分方程将是一个大型的线性方程组. 但是,这个方程组的系数矩阵中大量的元素都是零,即系数矩阵是稀疏的. 因此,采用迭代法求解比用直接法求解更为简便.

三、收敛性与误差估计

定义 13.1 定解问题在节点$(x_i,y_j)\in D_0\cup\Gamma_0$处准确解与数值解之差

$$e_{ij}=u(x_i,y_j)-u_{ij}$$

称为数值解 u_{ij}的截断误差. 若当 $h=\sqrt{h_1^2+h_2^2}\to 0$时,对 $D_0\cup\Gamma_0$中任意节点(x_i,y_j)都有 $e_{ij}\to 0$,则称数值解收敛于准确解,并称**差分格式是收敛的.**

定理 13.3 设边值问题(13.1)~(13.2)的解 $u(x,y)$在 $D\cup\Gamma$ 上具有四阶连续偏导数,在界点处数值解是准确的,则差分格式(13.9)给出的数值解的截断误差满足

$$|e_{ij}|\leqslant M_2h_1^2-\frac{1}{24}M_4(h_1^2+h_2^2)r^2,\quad (x_i,y_j)\in D_0,\qquad (13.12)$$

其中 r 是 $D\cup\Gamma$ 的外接圆 S 的半径，而

$$M_2=\max_{D\cup\Gamma}\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|\right),$$

$$M_4=\max_{D\cup\Gamma}\left(\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|,\ \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right|\right).$$

证 由(13.3)和(13.4)式知，截断误差 e_{ij}满足

$$L(e_{ij})=R_{ij}=\frac{1}{12}h_1^2\frac{\partial^4 u(\xi_i,y_j)}{\partial x^4}+\frac{1}{12}h_2^2\frac{\partial^4 u(x_i,\eta_j)}{\partial y^4},\ (x_i,y_j)\in D_1.$$

因此

$$|L(e_{ij})|\leqslant\frac{1}{12}M_4(h_1^2+h_2^2),\ (x_i,y_j)\in D_1.$$

设 $D\cup\Gamma$ 的外接圆 S 的圆心为(x_0,y_0)，令

$$v(x,y)=\frac{1}{48}M_4(h_1^2+h_2^2)[r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2],\ (x,y)\in S,$$

则 $v(x,y)$满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{1}{12}M_4(h_1^2+h_2^2),\quad (x,y)\in S.$$

因此

$$L(v_{ij})=-\frac{1}{12}M_4(h_1^2+h_2^2),\quad (x_i,y_j)\in D_1.$$

从而

$$|L(e_{ij})|\leqslant -L(v_{ij}),\quad (x_i,y_j)\in D_1.$$

由此得到

$$L(\pm e_{ij}-v_{ij})=\pm L(e_{ij})-L(v_{ij})\geqslant 0,\quad (x_i,y_j)\in D_1.$$

于是，由定理13.1及 $v_{ij}\geqslant 0$得到

$$\max_{D_1}(\pm e_{ij}-v_{ij})\leqslant\max_{D_2}(\pm e_{ij}-v_{ij})\leqslant\max_{D_2}|e_{ij}|.$$

又因为

$$\max_S v(x,y) = \frac{1}{48}M_4(h_1^2 + h_2^2)r^2,$$

所以

$$\max_{D_1}|e_{ij}| \leqslant \max_{D_2}|e_{ij}| + \frac{1}{48}M_4(h_1^2 + h_2^2)r^2. \qquad (13.13)$$

此外，对于$(x_i, y_j) \in D_2$，

$$e_{ij} = \frac{1}{h_1 + h_Q}(h_Q e_E + h_1 e_Q) - \widetilde{R}_{ij},$$

其中 $E \in D_0, Q \in \Gamma_0$. 注意到边界节点处数值解是准确的，即 $e_Q = 0$，而

$$|\widetilde{R}_{ij}| \leqslant \frac{1}{2}M_2 h_1^2,$$

因此

$$|e_{ij}| \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2}\max\limits_{D_1}|e_{ij}| + \frac{1}{2}M_2 h_1^2, & E \in D_1 \\ \frac{1}{2}\max\limits_{D_2}|e_{ij}| + \frac{1}{2}M_2 h_1^2, & E \in D_2 \end{cases}.$$

由此得到

$$\max_{D_2}|e_{ij}| \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2}\max\limits_{D_1}|e_{ij}| + \frac{1}{2}M_2 h_1^2, & E \in D_1 \\ M_2 h_1^2, & E \in D_2 \end{cases}. \qquad (13.14)$$

综合(13.13)与(13.14)式得

$$\max_{D_2}|e_{ij}| \leqslant M_2 h_1^2 + \frac{1}{48}M_4(h_1^2 + h_2^2)r^2,$$

$$\max_{D_1}|e_{ij}| \leqslant M_2 h_1^2 + \frac{1}{24}M_4(h_1^2 + h_2^2)r^2.$$

从而误差估计式(13.12)成立.　　　　证毕.

由定理13.3可知，当边界节点处数值解准确时，对 $D_0 \cup \Gamma_0$ 中每一个节点，当 $h \to 0$ 时都有 $e_{ij} \to 0$，因此差分格式是收敛的.

上面得到的误差估计式(13.12)称为**先验估计**. 它从理论上保证了差分格式的收敛性. 实际计算时,常用如下的事后估计方法.

用 $u_{ij}^{[h]}$,$u_{ij}^{[h/2]}$分别表示以 h_1和 h_2,$\frac{1}{2}h_1$和$\frac{1}{2}h_2$为网格步长时求得的点(x_i,y_j)处 u 的近似值,则它们的截断误差分别为

$$e_{ij}^{[h]}=u(x_i,y_j)-u_{ij}^{[h]}\approx ch^2,$$

$$e_{ij}^{[h/2]}=u(x_i,y_j)-u_{ij}^{[h/2]}\approx c(\frac{h}{2})^2.$$

其中 $h=\sqrt{h_1{}^2+h_2{}^2}$. 因此

$$u_{ij}^{[h/2]}-u_{ij}^{[h]}\approx\frac{3}{4}ch^2\approx 3e_{ij}^{[h/2]}.$$

于是

$$e_{ij}^{[h/2]}\approx\frac{1}{3}(u_{ij}^{[h/2]}-u_{ij}^{[h]}).$$

可用此式选择步长,使数值解的误差满足精度要求.

四、一般二阶椭圆型方程第三边值问题的差分格式

二阶椭圆型方程第三边值问题的一般形式为

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c\dfrac{\partial u}{\partial x}+d\dfrac{\partial u}{\partial y}+eu=f,\ (x,y)\in D & (13.15)\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+\omega u\right)_\Gamma=\varphi & (13.16)\end{cases}$$

其中 D 是 xy 平面上以分段光滑曲线 Γ 为边界的有界区域,a、b、c、d、e、f、ω、φ 都是已知函数,且 $a>0,b>0,e\leqslant 0,\omega\geqslant 0$. 将求解区域 D 进行矩形剖分,步长分别为 h_1和 h_2. 在正则内点(x_i,y_j)处,对二阶偏导数$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$仍按前面介绍的方法离散化,对一阶偏导数用数值微分公式

$$\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial x}=\frac{1}{2h_1}[u(x_{i+1},y_j)-u(x_{i-1},y_j)]+O(h_1^2),$$

$$\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y}=\frac{1}{2h_2}[u(x_i,y_{j+1})-u(x_i,y_{j-1})]-O(h_2^2)$$

离散化.最终得到差分方程

$$\frac{1}{h_1^2}a_{ij}(u_{(i+1)j}-2u_{ij}+u_{(i-1)j})+\frac{1}{h_2^2}b_{ij}(u_{i(j+1)}-2u_{ij}+u_{i(j-1)})$$

$$+\frac{1}{2h_1}c_{ij}(u_{(i+1)j}-u_{(i-1)j})+\frac{1}{2h_2}d_{ij}(u_{i(j+1)}-u_{i(j-1)})$$

$$+e_{ij}u_{ij}=f_{ij},\qquad (x_i,y_j)\in D_1. \tag{13.17}$$

其中 $a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij},e_{ij},f_{ij}$是相应函数在点$(x_i,y_j)$处的值.差分方程(13.17)的截断误差为

$$R_{ij}=O(h^2).$$

对非正则内点(x_i,y_j),借助边界条件建立方程.如图13-5,过点(x_i,y_j)作边界 Γ 的法线 QP.记 $h'=|QE|,h''=|GQ|$.取

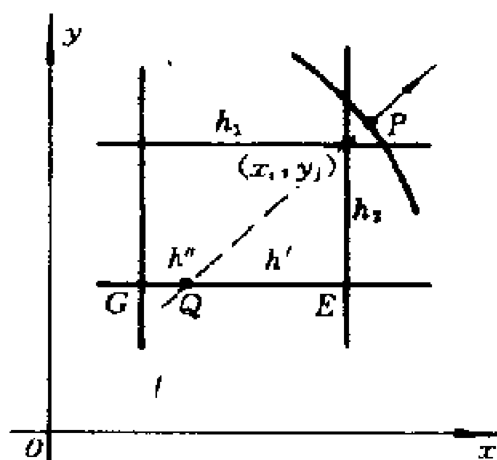


图 13-5

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P\approx\frac{1}{\sqrt{h_2^2+h'^2}}(u_{ij}-u_Q).$$

利用线性插值得

$$u_Q=\frac{1}{h_1}(h'u_G+h''u_E).$$

于是得到

$$\frac{1}{\sqrt{h_2^2+h'^2}}\left[u_{ij}-\frac{1}{h_1}(h'u_G+h''u_E)\right]+\omega(P)u_{ij}=\varphi(P). \tag{13.18}$$

(13.17)和(13.18)式构成逼近定解问题(13.15)~(13.16)的差分格式.

§ 13.2　抛物型方程的差分解法

本节首先以一维热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad 0 < t < T \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l \\ u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{13.19}$$

为例，讨论抛物型方程定解问题的差分解法，然后介绍解二维热传导方程定解问题的交替方向格式.

一、古典差分格式的构成

对定解问题(13.19)的求解区域

$$D = \{(x,t) \mid 0 < x < l, 0 < t < T\}$$

作矩形网格剖分，网格线取为

$$x = x_j = jh,$$

$$j = 0,1,\cdots,J,$$

$$t = t_n = n\tau,$$

$$n = 0,1,\cdots,N.$$

其中 $h = \dfrac{l}{J}$ 称为**空间步长**，$\tau = \dfrac{T}{N}$ 称为**时间步长**. 位于网格线 $t = t_n$ 上的节点

$$(x_j, t_n), \quad j = 0,1,\cdots,J,$$

称为第 n 层节点，如图13-6.

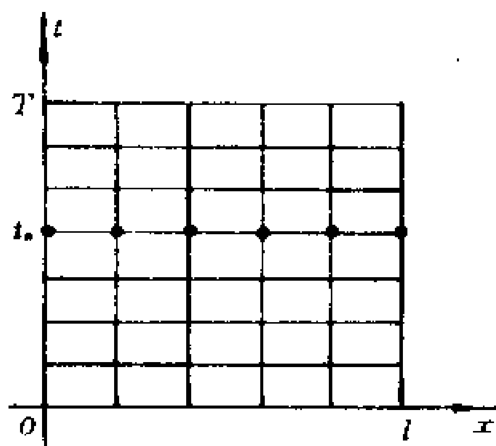


图 13-6

下面介绍几种简单的差分格式，它们统称为古典差分格式.

1. 最简显格式

将数值微分公式

$$\frac{\partial u(x_j,t_n)}{\partial t} = \frac{1}{\tau}[u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)]$$

$$-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_j,\eta_n)}{\partial t^2},\quad \eta_n\in(t_n,t_{n+1}),$$

和

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_n)}{\partial x^2}=\frac{1}{h^2}[u(x_{j+1},t_n)-2u(x_j,t_n)+u(x_{j-1},t_n)]$$

$$-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_j,t_n)}{\partial x^4},\quad \xi_j\in(x_{j-1},x_{j+1})$$

代入定解问题(13.19)的方程中,在节点(x_j,t_n)处方程化为

$$\frac{1}{\tau}[u(x_j,t_{n+1})-u(x_j,t_n)]$$

$$=\frac{1}{h^2}a^2[u(x_{j+1},t_n)-2u(x_j,t_n)+u(x_{j-1},t_n)]+R_{jn},$$

其中

$$R_{jn}=\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_j,\eta_n)}{\partial t^2}-\frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_j,t_n)}{\partial x^4}=O(\tau+h^2).$$

略去余项,并以$u_j^{(n)}$代替$u(x_j,t_n)$,得到差分方程

$$\frac{1}{\tau}(u_j^{(n+1)}-u_j^{(n)})-\frac{1}{h^2}a^2(u_{j+1}^{(n)}-2u_j^{(n)}+u_{j-1}^{(n)})=0,$$

$$j=1,2,\cdots,J-1. \tag{13.20}$$

记$r=\frac{\tau}{h^2}a^2$,称之为**网格比**,则(13.20)式又可写为

$$u_j^{(n+1)}=ru_{j-1}^{(n)}+(1-2r)u_j^{(n)}+ru_{j+1}^{(n)},$$

$$j=1,2,\cdots,J-1. \tag{13.21}$$

称此差分格式为**最简显格式**.它只涉及到点(x_j,t_n)及与它相邻的三个节点(x_{j-1},t_n),(x_{j+1},t_n)和(x_j,t_{n+1})处u的近似值,如图13-7所示.

由定解问题(13.19)的初始条件和边界条件得

$$u_j^{(0)}=\varphi_j,\ j=0,1,\cdots,J, \tag{13.22}$$

$$u_0^{(n)}=\mu_{1n},\quad u_J^{(n)}=\mu_{2n},\quad n=0,1,\cdots,N, \tag{13.23}$$

其中$\varphi_j=\varphi(x_j)$,$\mu_{1n}=\mu_1(t_n)$,$\mu_{2n}=\mu_2(t_n)$.

(13.22)式给出了第0层上各节点处 u 的值 $u_j^{(0)}, j=0,1,\cdots,J$. 在此基础上,利用最简显格式(13.21)可求得第1层上的值 $u_j^{(1)}, j=1,2,\cdots,J-1$. 由此再利用 $n=1$ 的(13.23)式,又可利用最简显格式(13.21)求得第2层上的值 $u_j^{(2)}, j=1,2,\cdots,J-1$. 如此一层一层地计算下去,最终求出全部节点上的数值解 $u_j^{(n)}$.

图 13-7

当 n 固定时,差分格式(13.21)可表示为

$$\begin{cases} u_1^{(n+1)} = (1-2r)u_1^{(n)} + ru_2^{(n)} + r\mu_{1n} \\ u_2^{(n+1)} = ru_1^{(n)} + (1-2r)u_2^{(n)} + ru_3^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{J-1}^{(n+1)} = ru_{J-2}^{(n)} + (1-2r)u_{J-1}^{(n)} + r\mu_{2n} \end{cases}$$

此方程组右端的系数矩阵是 $J-1$ 阶的三对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix}.$$

若再令

$$u^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \cdots, u_{J-1}^{(n)})^T,$$

$$g^{(n)} = (r\mu_{1n}, 0, \cdots, 0, r\mu_{2n})^T,$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{J-1})^T,$$

则由(13.21),(13.22)和(13.23)式组成的方程组可写成

$$\begin{cases} u^{(n+1)} = Au^{(n)} + g^{(n)}, \quad n = 0,1,\cdots,N-1 \\ u^{(0)} = \varphi \end{cases}. \tag{13.24}$$

2. 最简隐格式

如果对$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$用三点数值微分公式，而$\frac{\partial u}{\partial t}$改用数值微分公式

$$\frac{\partial u(x_j,t_n)}{\partial t} = \frac{1}{\tau}[u(x_j,t_n) - u(x_j,t_{n-1})] + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_j,\eta_n)}{\partial t^2}, \qquad \eta_n \in (t_{n-1},t_n),$$

则得又一差分方程

$$\frac{1}{\tau}(u_j^{(n)} - u_j^{(n-1)}) - \frac{1}{h^2}a^2(u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)}) = 0.$$

它又可写为

$$-ru_{j-1}^{(n)} + (1+2r)u_j^{(n)} - ru_{j+1}^{(n)} = u_j^{(n-1)}, \quad j = 1,2,\cdots,J-1. \tag{13.25}$$

差分方程(13.25)的截断误差仍然是$O(\tau+h^2)$. 它所联系的四个节点如图13-8所示. 利用初始条件(13.22)，边界条件(13.23)和差分方程(13.25)也可按t增加的方向逐层求出定解问题(13.19)的数值解. 它与最简显格式的区别在于，当已知第n层的u值欲求第$n+1$层的u值时，必须解包含$J-1$个未知数的线性方程组

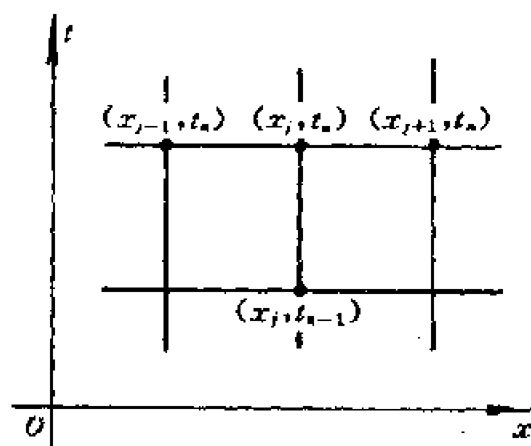


图 13-8

$$\begin{cases} (1+2r)u_1^{(n+1)} - ru_2^{(n+1)} = u_1^{(n)} + r\mu_{1(n+1)} \\ -ru_1^{(n+1)} + (1+2r)u_2^{(n+1)} - ru_3^{(n+1)} = u_2^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -ru_{J-2}^{(n+1)} + (1+2r)u_{J-1}^{(n+1)} = u_{J-1}^{(n)} + r\mu_{2(n+1)} \end{cases}$$

因此,差分格式(13.25)称为**最简隐格式**. 令

$$B=\begin{bmatrix}1+2r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -r & 1+2r & -r \\ & & & -r & 1+2r\end{bmatrix},$$

则(13.25),(13.22)和(13.23)式在一起组成线性方程组

$$\begin{cases}Bu^{(n+1)}=u^{(n)}+g^{(n+1)}, & n=0,1,\cdots,N-1 \\ u^{(0)}=\varphi\end{cases}. \tag{13.26}$$

3. 六点对称格式

由数值微分公式知

$$\frac{\partial u(x_j,t_{n+1})}{\partial t}=\frac{1}{\tau}[3u(x_j,t_{n+1})-4u(x_j,t_{n+\frac{1}{2}})+u(x_j,t_n)]$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\frac{\partial^3 u(x_j,\eta_n')}{\partial t^3},\quad \eta_n'\in(t_n,t_{n+1}),$$

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_{n+1})}{\partial x^2}=\frac{1}{h^2}[u(x_{j+1},t_{n+1})-2u(x_j,t_{n+1})+u(x_{j-1},t_{n+1})]$$

$$-\frac{1}{12}h^2\frac{\partial^4 u(\xi_j',t_{n+1})}{\partial x^4},\quad \xi_j'\in(x_{j-1},x_{j-1}).$$

代入定解问题(13.19)的方程中得

$$3u(x_j,t_{n+1})-4u(x_j,t_{n+\frac{1}{2}})+u(x_j,t_n)$$

$$=\frac{\tau}{h^2}a^2[u(x_{j+1},t_{n+1})-2u(x_j,t_{n+1})+u(x_{j-1},t_{n+1})]$$

$$+O(\tau^3+h^2). \tag{13.27}$$

另一方面,,由数值微分公式又知

$$\frac{\partial u(x_j,t_n)}{\partial t}=\frac{1}{\tau}[-u(x_j,t_{n+1})+4u(x_j,t_{n+\frac{1}{2}})-3u(x_j,t_n)]$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\frac{\partial^3 u(x_j,\eta_n^{\prime\prime})}{\partial t^3},\quad \eta_n^{\prime\prime}\in(t_n,t_{n+1}),$$

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_n)}{\partial x^2}=\frac{1}{h^2}[u(x_{j+1},t_n)-2u(x_j,t_n)+u(x_{j-1},t_n)]$$

$$-\frac{1}{12}h^2\frac{\partial^4 u(\xi_j^{\prime\prime},t_n)}{\partial x^4},\quad \xi_j^{\prime\prime}\in(x_{j-1},x_{j+1}).$$

代入定解问题(13.19)的方程中得

$$-u(x_j,t_{n+1})+4u(x_j,t_{n+\frac{1}{2}})-3u(x_j,t_n)$$

$$=\frac{\tau}{h^2}a^2[u(x_{j+1},t_n)-2u(x_j,t_n)+u(x_{j-1},t_n)]$$

$$+O(\tau^2+h^2). \tag{13.28}$$

(13.27)与(13.28)两式相加，略去余项，并以 $u_j^{(n)}$ 代替 $u(x_j,t_n)$ 得差分方程

$$-ru_{j-1}^{(n+1)}+2(1+r)u_j^{(n+1)}-ru_{j+1}^{(n+1)}$$

$$=ru_{j-1}^{(n)}-2(1-r)u_j^{(n)}+ru_{j+1}^{(n)},\ j=1,2,\cdots,J-1. \tag{13.29}$$

其截断误差为 $O(\tau^2+h^2)$. 比最简显格式和最简隐格式截断误差的阶有所提高. 差分方程(13.29)涉及到六个节点，如图13-9. 因此，称其为**六点对称格式**.

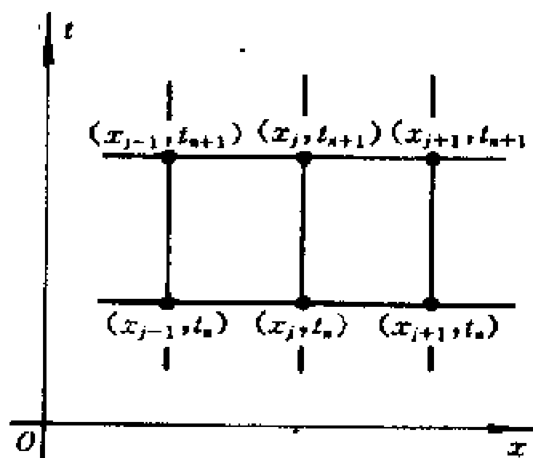


图 13-9

差分方程(13.29)与初始条件(13.22)，边界条件(13.23)一起组成一个线性方程组. 其矩阵形式为

$$\begin{cases}(E+B)u^{(n+1)}=(E+A)u^{(n)}+g^{(n+1)}+g^{(n)}, \\ \qquad n=0,1,\cdots,N-1 \\ u^{(0)}=\varphi\end{cases}, \tag{13.30}$$

其中 E 是 $J-1$阶单位矩阵，而其余符号意义如前所述.

以上给出的三种古典差分格式(13.24)，(13.26)和(13.30)可以写成统一的形式.

$$\begin{cases} u^{(n+1)}=Hu^{(n)}+f^{(n)}, & n=0,1,\cdots,N-1 \\ u^{(0)}=\varphi \end{cases}. \tag{13.31}$$

只是不同的格式对应于不同的矩阵 H 和向量 $f^{(n)}$. 对于最简显格式，$H=A$，$f^{(n)}=g^{(n)}$. 对于最简隐格式，$H=B^{-1}$，$f^{(n)}=B^{-1}g^{(n+1)}$. 而对于六点对称格式，$H=(E+B)^{-1}(E+A)$，$f^{(n)}=(E+B)^{-1}(g^{(n+1)}+g^{(n)})$.

二、差分格式的稳定性

形如(13.31)的差分格式，求解是逐层进行的. 前一层数值解的误差必然影响后面各层的计算结果. 因此，研究误差传播的性质是非常必要的. 这便是差分格式的稳定性问题.

为了讨论简便，假定边界值的计算是准确的. 设在初始层引入误差向量

$$\delta^{(0)}=(\delta_1^{(0)},\delta_2^{(0)},\cdots,\delta_{J-1}^{(0)})^T.$$

用

$$\tilde{u}^{(n)}=(\tilde{u}_1^{(n)},\tilde{u}_2^{(n)},\cdots,\tilde{u}_{J-1}^{(n)})^T \quad n=0,1,\cdots,N$$

表示当初始层有误差 $\delta^{(0)}$时，由(13.31)式得到的解，即 $\tilde{u}^{(n)}$满足方程

$$\begin{cases} \tilde{u}^{(n+1)}=H\tilde{u}^{(n)}+f^{(n)}, & n=0,1,\cdots,N-1 \\ \tilde{u}^{(0)}=\varphi+\delta^{(0)} \end{cases}. \tag{13.32}$$

记(13.32)的解 $\tilde{u}^{(n)}$与(13.31)的解 $u^{(n)}$之差为 $\delta^{(n)}$，即

$$\delta^{(n)}=\tilde{u}^{(n)}-u^{(n)}, \quad n=1,2,\cdots,N.$$

它是由 $\delta^{(0)}$引起的(13.31)解的误差. 由(13.31)和(13.32)式得到，$\delta^{(n)}$满足方程

$$\delta^{(n+1)}=H\delta^{(n)}, \qquad n=0,1,\cdots,N-1.$$

由此可推得

$$\delta^{(n)} = H^n \delta^{(0)}, \quad n = 1,2,\cdots,N.$$

因此

$$\|\delta^{(n)}\| \leqslant \|H^n\| \|\delta^{(0)}\|, \quad n = 1,2,\cdots,N.$$

如果对任意 n，都有$\|H^n\| \leqslant c$，此处 c 为与 h 和 τ 均无关的常数，则上式表明误差 $\delta^{(0)}$对以后各层的影响是有限的. 特别地，若$\|H^n\| \leqslant 1$，则由上式可知以后各层的误差是逐渐减小的. 因此，引入如下的稳定性定义.

定义 13.2　若对某种差分格式和C^{J-1}上的某种范数$\|\cdot\|$，存在与步长 h 和 τ 都无关的常数 c，使得

$$\|\delta^{(n)}\| \leqslant c\|\delta^{(0)}\|, \quad n = 1,2,\cdots,N.$$

则称这种差分格式是**稳定**的.

由以上的讨论可以得到如下结论.

定理 13.4　差分格式(13.31)稳定的充分必要条件是存在与 h 和 τ 都无关的常数 c，使得

$$\|H^n\| \leqslant c, \quad n = 1,2,\cdots,N, \tag{13.33}$$

其中$\|H^n\|$是矩阵 H^n 的与C^{J-1}中某种向量范数相容的方阵范数.

定理 13.5　差分格式(13.31)稳定的必要条件是存在与 h 和 τ 都无关的常数 σ，使得 H 的谱半径满足

$$\rho(H) \leqslant 1 + \sigma\tau. \tag{13.34}$$

证　若差分格式(13.31)是稳定的，由定理13.4，存在与 h 和 τ 都无关的常数 c，使得

$$\|H^n\| \leqslant c, \quad n = 1,2,\cdots,N.$$

由此得到

$$\rho^n(H) = \rho(H^n) \leqslant c.$$

特别地，取 n 满足

$$\frac{T-\tau}{\tau} \leqslant n \leqslant \frac{T}{\tau},$$

则有

$$\rho(H) \leqslant c^{\tau/(T-\tau)} = e^{\tau\ln c/(T-\tau)}$$
$$= 1 + \tau\left(\frac{\ln c}{T-\tau}\right) + \frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\ln c}{T-\tau}\right)^2 + \cdots \leqslant 1 + \sigma\tau,$$

其中

$$\sigma = \frac{\ln c}{T-\tau_0}c^{\tau_0/(T-\tau_0)}.$$

此处 $\tau_0 \in (\tau, T)$ 为常数. 证毕.

在某些特殊情况下,条件(13.34)也是充分的.

定理 13.6 若 H 为正规矩阵,则条件(13.34)是差分格式(13.31)稳定的充分条件.

证 若 H 为正规矩阵,则 H^n 也是正规矩阵. 由习题三第28题及(13.34)式得

$$\|H\|_2^n = \rho^n(H) \leqslant (1+\sigma\tau)^n \leqslant (1+\sigma\tau)^{T/\tau} \leqslant e^{\sigma T}.$$

从而

$$\|H^n\|_2 \leqslant e^{\sigma T}$$

根据定理13.4,差分格式(13.31)是稳定的. 证毕.

现在讨论前面介绍的三种古典差分格式的稳定性.

定理 13.7 最简显格式(13.24)当且仅当 $r \leqslant \frac{1}{2}$ 时是稳定的.

证 对于最简显格式(13.24),$H=A$ 是正规矩阵. 可以求得 A 的特征值为(参见〔15〕)

$$\lambda_j = 1 - 4r\sin^2\frac{j\pi}{2J}, \quad j=1,2,\cdots,J-1.$$

当 $r \leqslant \frac{1}{2}$ 时,

$$1 > \lambda_j \geqslant 1 - 2\sin^2\frac{j\pi}{2J} > -1, \quad j=1,2,\cdots,J-1.$$

因此,对一切 n 都有

$$\|A^n\|_2 = \|A\|_2^n = \rho^n(A) < 1.$$

根据定理13.4，最简显格式(13.24)是稳定的. 当 $r>\frac{1}{2}$时，只要 J 充分大，即步长 h 充分小，就可使得

$$r\sin^2\frac{(J-1)\pi}{2J}>\frac{1}{2}.$$

由此得到

$$|\lambda_{J-1}|=\left|1-4r\sin^2\frac{(J-1)\pi}{2J}\right|>1.$$

而
$$\|A^n\|_2=\|A\|_2^n\geqslant|\lambda_{J-1}|^n.$$

因此，不会存在与 h 和 τ 都无关的常数 c，使得对一切 n 都有

$$\|A^n\|_2\leqslant c.$$

根据定理13.4，最简显格式(13.24)是不稳定的. 证毕.

定理 13.8 最简隐格式(13.26)和六点对称格式(13.30)对任何 $r>0$都是稳定的，即为无条件稳定的.

证 对于最简隐格式(13.26)，$H=B^{-1}$是正规矩阵. 因为将矩阵 A 中的 r 换成 $-r$ 便得到矩阵 B，所以矩阵 B 的特征值为

$$\mu_j=1+4r\sin^2\frac{j\pi}{2J},\quad j=1,2,\cdots,J-1.$$

从而 H 的特征值为

$$\lambda_j=\mu_j^{-1}=\frac{1}{1+4r\sin^2\frac{j\pi}{2J}},\quad j=1,2,\cdots,J-1.$$

于是，对于任意 $r>0$都有 $\rho(H)<1$. 根据定理13.6，差分格式(13.26)是稳定的.

对于六点对称格式(13.30)，$H=(E+B)^{-1}(E+A)$. 因为 $E+B$ 和 $E+A$ 都是实对称矩阵，所以 H 也是实对称矩阵，从而是正规矩阵，H 的特征值为

$$\lambda_j=\frac{2-4r\sin^2\frac{j\pi}{2J}}{2+4r\sin^2\frac{j\pi}{2J}},\quad j=1,2,\cdots,J-1.$$

可见，对任意 $r>0$ 都有

$$\rho(H)<1.$$

根据定理13.6，差分格式(13.30)是稳定的. 证毕.

三、差分格式的收敛性

差分格式的收敛性，如定义13.1所述，指的是对求解区域 D 内任意固定的节点 (x_j,t_n)，当步长 $h\to0$ 和 $\tau\to0$ 时，截断误差

$$e_{jn}=u(x_j,t_n)-u_j^{(n)}\to0.$$

差分格式的收敛性与稳定性有着密切联系. 为了揭示这种联系，先介绍差分格式相容性概念.

定义 13.3 若当 $h\to0$ 且 $\tau\to0$ 时，差分格式的截断误差

$$R_{jn}\to0,$$

则称差分格式与微分方程**相容**，或称**差分格式具有相容性**.

按定义，前面给出的几种古典差分格式都具有相容性.

下面给出一个关于差分格式收敛性的定理，其证明可参阅文献[20].

定理 13.9 如果差分格式(13.31)具有相容性，且是稳定的，则它的解收敛于定解问题(13.19)的解，即差分格式是收敛的.

根据定理13.7，13.8和13.9，最简显格式(13.24)，最简隐格式(13.26)和六点对称格式(13.30)都是收敛的.

四、二维热传导方程的交替方向格式

考虑二维热传导方程的定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}\right), & 0<x<l_1,0<y<l_2,0<t<T\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y), \quad 0\leqslant x\leqslant l_1, & 0\leqslant y\leqslant l_2\\ u|_{x=0}=\mu_1(y,t), \quad u|_{x=l_1}=\mu_2(y,t), & 0\leqslant y\leqslant l_2,0\leqslant t\leqslant T\\ u|_{y=0}=\nu_1(x,t), \quad u|_{y=l_2}=\nu_2(x,t), & 0\leqslant x\leqslant l_1,0\leqslant t\leqslant T\end{cases}$$

(13.35)

取时间步长为 τ，x 方向和 y 方向的空间步长为 h. 记

$$t_n=n\tau,\quad n=0,1,\cdots,N=\frac{T}{\tau},$$

$$x_j=jh,\quad j=0,1,\cdots,J=\frac{l_1}{h},$$

$$y_k=kh,\quad k=0,1,\cdots,K=\frac{l_2}{h}.$$

节点

$$(x_j,y_k,t_n),\quad j=0,1,\cdots,J,\ k=0,1,\cdots,K$$

称为第 n 层节点. 解在该节点的值 $u(x_j,y_k,t_n)$ 的近似值记为 $u_{jk}^{(n)}$.

依照一维情况的作法，可建立求定解问题(13.35)数值解的显格式

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}(u_{jk}^{(n+1)}-u_{jk}^{(n)})=\dfrac{a^2}{h^2}(u_{(j+1)k}^{(n)}-2u_{jk}^{(n)}+u_{(j-1)k}^{(n)}\\ \qquad\qquad +u_{j(k+1)}^{(n)}-2u_{jk}^{(n)}+u_{j(k-1)}^{(n)})\\ u_{jk}^{(0)}=\varphi(x_j,y_k),\\ u_{0k}^{(n)}=\mu_1(y_k,t_n),\ \mu_{Jk}^{(n)}=\mu_2(y_k,t_n)\\ u_{j0}^{(n)}=\nu_1(x_j,t_n),\ \nu_{jK}^{(n)}=\nu_2(x_j,t_n)\end{cases}. \qquad (13.36)$$

当初值和边界条件给定后，可以按照 $n=1,2,\cdots,N$ 的次序逐层求解. 显格式(13.36)的截断误差为 $O(\tau+h^2)$，稳定性条件是

$$r=\frac{\tau}{h^2}a^2\leqslant\frac{1}{4}.$$

一般 m 维热传导方程显格式的稳定性条件为

$$r=\frac{\tau}{h^2}a^2\leqslant\frac{1}{2m}.$$

因此，维数越高要求时间步长 τ 越小，计算工作量也就越大.

求解定解问题(13.35)的隐格式为

$$
\begin{cases}
\frac{1}{\tau}(u_{jk}^{(n)} - u_{jk}^{(n-1)}) = \frac{a^2}{h^2}(u_{(j+1)k}^{(n)} - 2u_{jk}^{(n)} + u_{(j-1)k}^{(n)} \\
\qquad + u_{j(k+1)}^{(n)} - 2u_{jk}^{(n)} + u_{j(k-1)}^{(n)}) \\
u_{jk}^{(0)} = \varphi(x_j, y_k) \\
u_{0k}^{(n)} = \mu_1(y_k, t_n), u_{Jk}^{(n)} = \mu_2(y_k, t_n) \\
u_{j0}^{(n)} = \nu_1(x_j, t_n), u_{jK}^{(n)} = \nu_2(x_j, t_n)
\end{cases} \tag{13.37}
$$

其截断误差仍为 $O(\tau+h^2)$. 它是无条件稳定的. 求解(13.37)时，每计算一层的数值解都需要解一个五对角线性方程组.

下面介绍交替方向格式，它综合了显格式求解简便，隐格式无条件稳定的优点.

引进过渡层

$$
(x_j, y_k, t_{n+\frac{1}{2}}), \quad j = 0,1,\cdots,J, \quad k = 0,1,\cdots,K.
$$

首先在过渡层上构造显格式(13.36)，此时对 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 在第 n 层上离散化；然后在过渡层上构造隐格式(13.37)，此时对 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 在第 $n+1$ 层上离散化. 将两个格式联立得到

$$
\begin{cases}
\frac{2}{\tau}(u_{jk}^{(n+\frac{1}{2})} - u_{jk}^{(n)}) = \frac{a^2}{h^2}(u_{(j+1)k}^{(n+\frac{1}{2})} - 2u_{jk}^{(n+\frac{1}{2})} + u_{(j-1)k}^{(n+\frac{1}{2})} \\
\qquad + u_{j(k+1)}^{(n)} - 2u_{jk}^{(n)} + u_{j(k-1)}^{(n)}) \\
\frac{2}{\tau}(u_{jk}^{(n+1)} - u_{jk}^{(n+\frac{1}{2})}) = \frac{a^2}{h^2}(u_{(j+1)k}^{(n+\frac{1}{2})} - 2u_{jk}^{(n+\frac{1}{2})} + u_{(j-1)k}^{(n+\frac{1}{2})} \\
\qquad + u_{j(k+1)}^{(n+1)} - 2u_{jk}^{(n+1)} + u_{j(k-1)}^{(n+1)})
\end{cases} \tag{13.38}
$$

差分格式(13.38)称为 P-R(Peaceman-Rackford)格式. 它是无条件稳定的，其截断误差为 $O(\tau^2+h^2)$. 应用 P-R 格式解定解问题(13.35)时，每层计算包含两个过程. 首先，对每个确定的 $k, k=1, 2, \cdots, K-1$，应用(13.38)的第一式求出 $u_{jk}^{(n+\frac{1}{2})}, j=1,2,\cdots,J-1$. 这需要解 $K-1$ 个三对角方程组. 其次，对每一个确定的 $j, j=1, 2,\cdots,J-1$，应用(13.38)的第二式求出 $u_{jk}^{(n+1)}, k=1,2,\cdots,K-1$.

这又需要解 $J-1$ 个三对角方程组. 因此, P-R 格式又称为**交替方向格式**.

§ 13.3 双曲型方程的差分解法

本节以弦振动方程带第一类边界条件的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & 0 < x < l, \quad 0 < t < T \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l \\ u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{13.39}$$

为例, 介绍双曲型方程混合问题的差分解法.

一、三层显格式

依照一维热传导方程定解问题的处理方法, 对求解区域做矩形网格剖分. 在第 n 层内节点 (x_j,t_n) 处, 利用数值微分公式

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_n)}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau^2}[u(x_j,t_{n+1}) - 2u(x_j,t_n) + u(x_j,t_{n-1})] - \frac{1}{12}\tau^2 \frac{\partial^4 u(x_j,\eta_n)}{\partial t^4}, \quad \eta_n \in (t_{n-1},t_{n+1})$$

和

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_n)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}[u(x_{j+1},t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_{j-1},t_n)] - \frac{1}{12}h^2 \frac{\partial^4 u(\xi_j,t_n)}{\partial x^4}. \quad \xi_y \in (x_{j-1},x_{j+1})$$

可建立差分方程

$$\frac{1}{\tau^2}(u_j^{(n+1)} - 2u_j^{(n)} + u_j^{(n-1)}) = \frac{1}{h^2}a^2(u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)}) + f_{jn}, \tag{13.40}$$

其中 $f_{jn} = f(x_j,t_n)$. 记 $r = \dfrac{\tau a}{h}$, 称之为网格比. 差分格式(13.40)又可写为

$$u_j^{(n+1)}=r^2u_{j-1}^{(n)}+2(1-r^2)u_j^{(n)}+r^2u_{j+1}^{(n)}-u_j^{(n-1)}+\tau^2 f_{jn}. \tag{13.41}$$

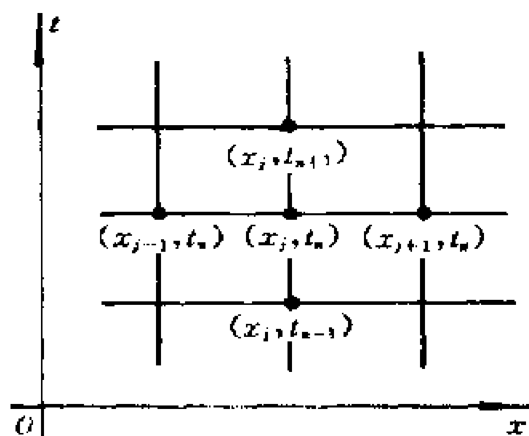


图 13-10

这是一个显格式，它涉及到点(x_j,t_n)及四个相邻点，如图13-10所示. 这些点分布在第$n-1$，n 和 $n+1$三层上. 因此，差分格式(13.41)称为**三层显格式**. 它的截断误差为$O(\tau^2+h^2)$.

利用三层显格式求解时，也是逐层进行的，此时必须首先知道初始层和第一层的值. 初始层的值可由初始条件直接得到

$$u_j^{(0)}=\varphi(x_j),\quad j=0,1,\cdots,J. \tag{13.42}$$

第一层的值需借助于初始条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x).$$

简单的方法是用数值微分公式

$$\frac{\partial u(x_j,t_0)}{\partial t}=\frac{1}{\tau}[u(x_j,t_1)-u(x_j,t_0)]+O(\tau)$$

得到

$$u_j^{(1)}=\varphi(x_j)+\tau\psi(x_j),\quad j=0,1,\cdots,J. \tag{13.43}$$

差分方程(13.41)对微分方程的逼近误差为$O(\tau^2+h^2)$，而(13.43)式的逼近误差为$O(\tau)$，这将使总的逼近效果低于$O(\tau^2+h^2)$. 为了使两者的逼近精度相适应，可以采用如下方法. 由

$$\frac{\partial u(x_j,t_0)}{\partial t}=\frac{1}{2\tau}[u(x_j,t_1)-u(x_j,t_{-1})]+O(\tau^2)$$

得差分方程

$$\frac{1}{2\tau}(u_j^{(1)}-u_j^{(-1)})=\psi(x_j).$$

这里又引出一个新的未知量 $u_j^{(-1)}$. 为了避免出现 $u_j^{(-1)}$，利用 $n=0$ 时的差分方程(13.40)得到

$$u_j^{(1)} = r^2 u_{j-1}^{(0)} + 2(1-r^2)u_j^{(0)} + r^2 u_{j+1}^{(0)} - u_j^{(-1)} + \tau^2 f_{j0}.$$

将以上两式联立消去 $u_j^{(-1)}$ 得

$$u_j^{(1)} = \frac{1}{2}r^2\varphi(x_{j-1}) + (1-r^2)\varphi(x_j) + \frac{1}{2}r^2\varphi(x_{j+1}) + \tau\psi(x_j) + \frac{1}{2}\tau^2 f_{j_0}. \tag{13.44}$$

此式的逼近误差为 $O(\tau^2)$.

在计算过程中，边界上节点的值可利用边界条件直接得到

$$u_0^{(n)} = \mu_1(t_n),\ u_J^{(n)} = \mu_2(t_n),\quad n = 0,1,\cdots,N.$$

三层显格式稳定性条件是网格比 $r \leqslant 1$.

二、三层隐格式

将数值微分公式

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_{n+1})}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}[u(x_{j+1},t_{n+1}) - 2u(x_j,t_{n+1}) + u(x_{j-1},t_{n+1})] + O(h^2)$$

和

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_{n-1})}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}[u(x_{j+1},t_{n-1}) - 2u(x_j,t_{n-1}) + u(x_{j-1},t_{n-1})] + O(h^2)$$

代入插值公式

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_n)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u(x_j,t_{n+1})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_j,t_{n-1})}{\partial x^2}\right) + O(\tau^2)$$

得到

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_n)}{\partial x^2} = \frac{1}{2h^2}[u(x_{j+1},t_{n+1}) - 2u(x_j,t_{n+1}) + u(x_{j-1},t_{n+1}) + u(x_{j+1},t_{n-1}) - 2u(x_j,t_{n-1}) + u(x_{j-1},t_{n-1})] + O(\tau^2 + h^2).$$

将此式及数值微分公式

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_n)}{\partial t^2}=\frac{1}{\tau^2}[u(x_j,t_{n+1})-2u(x_j,t_n)+u(x_j,t_{n-1})]+O(\tau^2)$$

代入问题(13.39)的微分方程，略去余项，用 $u_j^{(n)}$ 代替 $u(x_j,t_n)$，得到差分方程

$$\frac{1}{\tau^2}(u_j^{(n+1)}-2u_j^{(n)}+u_j^{(n-1)})$$

$$=\frac{1}{2h^2}a^2(u_{j+1}^{(n+1)}-2u_j^{(n+1)}+u_{j-1}^{(n+1)}+u_{j+1}^{(n-1)}-2u_j^{(n-1)}+u_{j-1}^{(n-1)})+f_{jn}.$$

将网格比 $r=\frac{\tau a}{h}$ 代入上式，并整理得到

$$r^2u_{j+1}^{(n+1)}-2(1+r^2)u_j^{(n+1)}+r^2u_{j-1}^{(n+1)}$$

$$=-r^2u_{j+1}^{(n-1)}+2(1+r^2)u_j^{(n-1)}-r^2u_{j-1}^{(n-1)}-4u_j^{(n)}+2\tau^2f_{jn}. \tag{13.45}$$

这是一个隐式差分格式，称为**三层隐格式**，其截断误差为 $O(\tau^2+h^2)$，初始条件和边界条件的使用与三层显格式相同. 可以证明，三层隐格式(13.45)是无条件稳定的. 而且是收敛的(参见[20]).

§13.4 有限元方法

前面几节介绍的差分方法是直接对方程及定解条件离散化，把求解定解问题转化为求解线性代数方程组. 本节介绍的有限元方法是在变分原理基础上进行离散化处理，而导致求解线性代数方程组的. 有限元方法是古典变分法与分块多项式插值相结合的产物. 对于那些物理性态、几何形状比较复杂的定解问题，有限元方法具有灵活、方便等优点. 有限元方法已成为工程技术人员广泛使用的一种方法. 本节仅以椭圆型方程边值问题为例，介绍有限元方法的基本思想和解题途径.

一、变分原理

设 D 是 xy 平面上的有界区域，其边界是由分段光滑的互不

相交的曲线 Γ_1 和 Γ_2 组成. 考虑二阶变系数椭圆型方程边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(p\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+qu=f, \ (x,y)\in D \\ u|_{\Gamma_1}=\varphi \\ \left(p\dfrac{\partial u}{\partial n}+\omega u\right)_{\Gamma_2}=\psi \end{cases}, \tag{13.46}$$

其中 $p,q,f,\varphi,\omega,\psi$ 都是已知函数, 且 $p(x,y)>0, q(x,y)\geqslant 0$ 和 $f(x,y)$ 都在 $\overline{D}$ 上充分光滑, $\omega(x,y)\geqslant 0$.

记

$$\mathscr{U}=\{u \mid u\in C^2(\overline{D}), \quad u|_{\Gamma_1}=\varphi\}.$$

求 $\tilde{u}\in\mathscr{U}$, 使泛函

$$J(u)=\iint_D\left[p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+qu^2-2fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+\int_{\Gamma_2}(\omega u^2-2\psi u)\mathrm{d}s$$

达到在 $\mathscr{U}$ 上的极小值, 即求 $\tilde{u}\in\mathscr{U}$, 使得

$$J(\tilde{u})=\min_{u\in\mathscr{U}}J(u). \tag{13.47}$$

这样的问题称为与边值问题(13.46)相应的**变分问题**, $\tilde{u}$ 称为变分问题(13.47)的解.

设 $u_0\in\mathscr{U}, \eta\in C^2(\overline{D})$ 且满足 $\eta|_{\Gamma_1}=0$. 令

$$I(\alpha)=J(u_0+\alpha\eta),$$

其中 $\alpha\in\mathbb{R}$, 则

$$I(\alpha)=J(u_0)+\alpha^2\iint_D\left[p\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+p\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+q\eta^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+2\alpha\iint_D\left[p\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+p\frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+qu_0\eta-f\eta\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+\alpha^2\int_{\Gamma_2}\omega\eta^2\mathrm{d}s+2\alpha\int_{\Gamma_2}(\omega u_0-\psi)\eta\mathrm{d}s.$$

由此得到

$$I'(0)=2\iint_D\left[p\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+p\frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+qu_0\eta-f\eta\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+2\int_{\Gamma_2}(\omega u_0-\psi)\eta\mathrm{d}s. \tag{13.48}$$

于是

$$J(u_0+\alpha\eta)-J(u_0)$$

$$=\alpha I'(0)+\alpha^2\iint_D\left[p\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+p\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+q\eta^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\alpha^2\int_{\Gamma_2}\omega\eta^2\mathrm{d}s.$$

因此，当$|\alpha|$充分小时，$\alpha I'(0)$是泛函改变量$J(u_0+\alpha\eta)-J(u_0)$的线性主部. 类似于函数的微分，称$\alpha I'(0)$为泛函$J(u)$在u_0处的**变分**，记为$\delta J(u_0)$，即

$$\delta J(u_0)=\alpha I'(0).$$

边值问题(13.46)与变分问题(13.47)有如下等价关系.

定理 13.10 $\tilde{u}\in\mathscr{U}$是变分问题(13.47)的解当且仅当$\tilde{u}$是边值问题(13.46)的解.

证 设$\tilde{u}\in\mathscr{U}$是变分问题(13.47)的解，$\eta\in C^2(\overline{D})$且满足$\eta|_{\Gamma_1}=0$，则函数

$$I(\alpha)=J(\tilde{u}+\alpha\eta)$$

当$\alpha=0$时取极小值，因此有

$$\delta J(\tilde{u})=\alpha I'(0)=0.$$

由(13.48)式得

$$\delta J(\tilde{u})=2\alpha\iint_D\left[p\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+p\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+q\tilde{u}\eta-f\eta\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+2\alpha\int_{\Gamma_2}(\omega\tilde{u}-\psi)\eta ds.$$

又

$$\iint_D \left[p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\eta \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\eta \right) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \iint_D \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) \right] \eta \mathrm{d}x\mathrm{d}y . \quad (13.49)$$

利用 Green 公式,并注意到 $\eta|_{\Gamma_1}=0$,有

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\eta \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\eta \right) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\Gamma_2} p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\eta \mathrm{d}y - p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\eta \mathrm{d}x$$

$$= \int_{\Gamma_2} p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}\eta \mathrm{d}s . \quad (13.50)$$

于是得到

$$\delta J(\tilde{u}) = 2\iint_D \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) + q\tilde{u} - f \right] \alpha\eta \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ 2\int_{\Gamma_2} \left[p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} + \omega\tilde{u} - \psi \right] \alpha\eta \mathrm{d}s .$$

由 $\delta J(\tilde{u})=0$及 $\alpha\eta$ 的任意性得到

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(p \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) + q\tilde{u} - f = 0, \quad (x,y) \in D \\ \left(p \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial n} + \omega\tilde{u} - \psi \right)_{\Gamma_2} = 0 \end{cases}$$

这表明 $\tilde{u}$ 是边值问题(13.46)的解.

反之,若 $\tilde{u}\in\mathscr{U}$ 是边值问题(13.46)的解. 对任意 $u\in\mathscr{U}$,记 $\eta=u-\tilde{u}$. 显然 $\eta\in C^2(\overline{D})$且 $\eta|_{\Gamma_1}=0$. 于是,

$$J(u) = J(\tilde{u} + \eta)$$

$$= J(\tilde{u}) + \iint_D \left[p\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + p\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + q\eta^2 \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+2\iint_D\left[p\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+p\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+q\tilde{u}\eta-f\eta\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\Gamma_2}\omega\eta^2\mathrm{d}s+2\int_{\Gamma_2}(\omega\tilde{u}-\psi)\eta\mathrm{d}s\,.$$

利用(13.49)和(13.50)式得

$$J(u)=J(\tilde{u})+\iint_D\left[p\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+p\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+q\eta^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+2\iint_D\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\right)+q\tilde{u}-f\right]\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+2\int_{\Gamma_2}\left[p\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}+\omega\tilde{u}-\psi\right]\eta\mathrm{d}s+\int_{\Gamma_2}\omega\eta^2\mathrm{d}s\,.$$

因为 $\tilde{u}$ 满足(13.46)的方程和边界条件，所以上式第三、四两项等于零. 又因为 $p(x,y)>0,q(x,y)\geqslant 0,\omega(x,y)\geqslant 0$，所以上式第二、五两项积分非负. 因此

$$J(u)\geqslant J(\tilde{u}).$$

这表明 $\tilde{u}$ 是变分问题(13.47)的解. 证毕.

根据上述定理，可以将边值问题(13.46)转化为变分问题(13.47)去求解. 依据定理的证明，对于变分问题(13.47)的解，第三类边界条件

$$\left[p\frac{\partial u}{\partial n}+\omega u\right]_{\Gamma_2}=\psi$$

是自然满足的，无需作为定解条件列出. 而第一类边界条件

$$u|_{\Gamma_1}=\varphi$$

则不然，是强加给泛函 $J(u)$ 上的约束条件，称为**强加边界条件**，在求解时必须加以考虑.

二、区域剖分

为了把变分问题离散化，对求解区域 D 进行网格剖分. 最简单且最常用的剖分方法是进行三角形剖分. 首先用适当的折线逼

近求解区域的边界 Γ，形成一个内接多边形. 然后将内接多边形剖分成一系列三角形，如图13-11所示. 每个三角形区域称为一个**面单元**. 设面单元集合为 D_h，h 表示诸三角形之边长的最大值. 逼近 Γ_2的折线上的直线段称为**线单元**. 线单元集合记为 Γ_h. 于是，泛函$J(u)$可近似地表示为

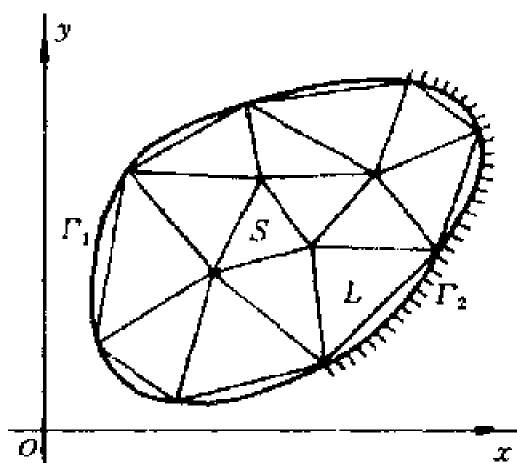


图 13-11

$$J(u)=\sum_{S\in D_h}I_S+\sum_{L\in\Gamma_h}I_L. \tag{13.51}$$

其中

$$I_S=\iint_S\left[p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+qu^2-2fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{13.52}$$

$$I_L=\int_L(\alpha u^2-2\psi u)\mathrm{d}s. \tag{13.53}$$

下面分别讨论面单元上的积分 I_S 和线单元上的积分 I_L.

三、面单元分析

设面单元 S 三个顶点按逆时针顺序依次编号为 i,j,k（如图13-12所示），其坐标分别为 $Q_i(x_i,y_i)$，$Q_j(x_j,y_j)$，$Q_k(x_k,y_k)$. 作插值函数 $w(x,y)=\alpha_Sx+\beta_Sy+\gamma_S$，$(x,y)\in S$，使其满足

$$\begin{cases}u_i=u(x_i,y_i)=\alpha_Sx_i+\beta_Sy_i+\gamma_S\\u_j=u(x_j,y_j)=\alpha_Sx_j+\beta_Sy_j+\gamma_S\\u_k=u(x_k,y_k)=\alpha_Sx_k+\beta_Sy_k+\gamma_S\end{cases}.$$

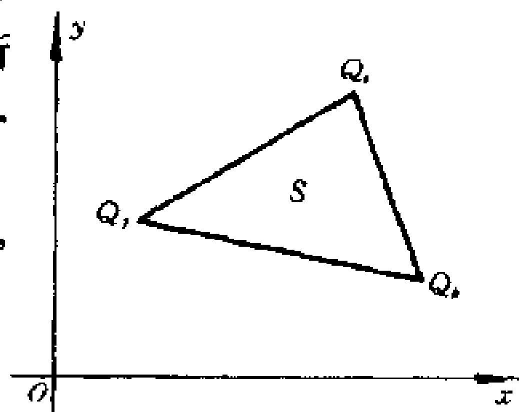


图 13-12

根据 Cramer 法则，得到

$$\begin{cases} \alpha_S = \dfrac{1}{2\Delta_S}(a_i u_i + a_j u_j + a_k u_k) \\ \beta_S = \dfrac{1}{2\Delta_S}(b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k) \\ \gamma_S = \dfrac{1}{2\Delta_S}(c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k) \end{cases}.$$

其中

$$a_i = y_j - y_k,\quad a_j = y_k - y_i,\quad a_k = y_i - y_j,$$

$$b_i = x_k - x_j,\quad b_j = x_i - x_k,\quad b_k = x_j - x_i,$$

$$c_i = x_j y_k - x_k y_j,\quad c_j = x_k y_i - x_i y_k,\quad c_k = x_i y_j - x_j y_i,$$

$$\Delta_S = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{bmatrix} = \text{三角形 } Q_iQ_jQ_k \text{ 的面积}.$$

于是，插值函数 $w(x,y)$ 可表为

$$w(x,y) = \lambda_i u_i + \lambda_j u_j + \lambda_k u_k,\quad (x,y) \in S.$$

其中基函数

$$\begin{cases} \lambda_i = \dfrac{1}{2\Delta_S}(a_i x + b_i y + c_i) \\ \lambda_j = \dfrac{1}{2\Delta_S}(a_j x + b_j y + c_j) \\ \lambda_k = \dfrac{1}{2\Delta_S}(a_k x + b_k y + c_k) \end{cases}.$$

不难验证，基函数具有如下性质：

(1) $\lambda_i(x_l, y_l) = \begin{cases} 0 & \text{当 } l = j,k \\ 1 & \text{当 } l = i \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} \lambda_i + \lambda_j + \lambda_k = 1 \\ x = x_i\lambda_i + x_j\lambda_j + x_k\lambda_k \\ y = y_i\lambda_i + y_j\lambda_j + y_k\lambda_k \end{cases}$; $\qquad$ (13.54)

(3) 连接 $Q(x,y)$ 和三角形 S 各顶点(如图13-13),则

$$\lambda_i=\frac{1}{2\Delta_S}\det\begin{bmatrix}x & y & 1\\ x_j & y_j & 1\\ x_k & y_k & 1\end{bmatrix}=\frac{\text{三角形 } QQ_jQ_k \text{ 的面积}}{\text{三角形 } Q_iQ_jQ_k \text{ 的面积}},\tag{13.55}$$

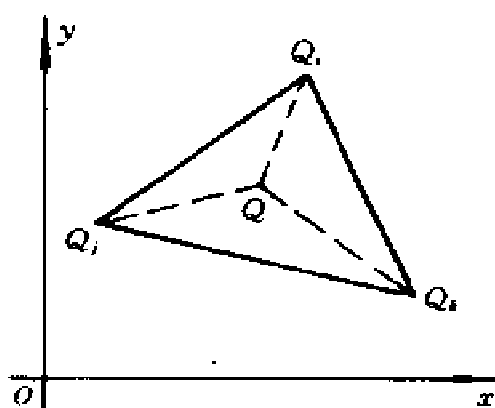


图 13-13

$$\lambda_j=\frac{1}{2\Delta_S}\det\begin{bmatrix}x_i & y_i & 1\\ x & y & 1\\ x_k & y_k & 1\end{bmatrix}=\frac{\text{三角形 } Q_iQQ_k \text{ 的面积}}{\text{三角形 } Q_iQ_jQ_k \text{ 的面积}},\tag{13.56}$$

$$\lambda_k=\frac{1}{2\Delta_S}\det\begin{bmatrix}x_i & y_i & 1\\ x_j & y_j & 1\\ x & y & 1\end{bmatrix}=\frac{\text{三角形 } Q_iQ_jQ \text{ 的面积}}{\text{三角形 } Q_iQ_jQ_k \text{ 的面积}}.\tag{13.57}$$

由(13.54)得到

$$\begin{cases}x=(x_i-x_k)\lambda_i+(x_j-x_k)\lambda_j+x_k\\ y=(y_i-y_k)\lambda_i+(y_j-y_k)\lambda_j+y_k\end{cases}.\tag{13.58}$$

它可视为由变量(λ_i,λ_j)到变量(x,y)的线性变换,它是由(x,y)到(λ_i,λ_j)的线性变换(13.55)和(13.56)的逆变换. 在变换(13.55),(13.56)下,xy 平面上的三角形区域 S 变成 $\lambda_i\lambda_j$ 平面上的三角形

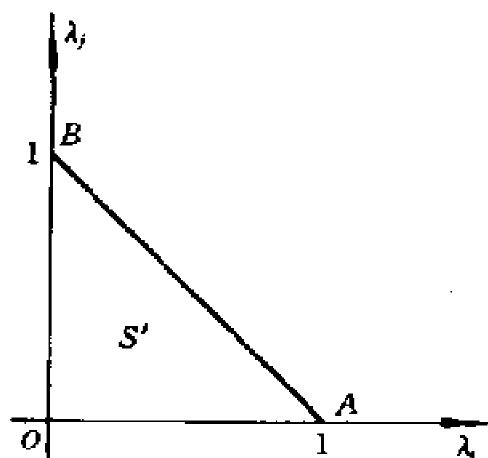


图 13—14

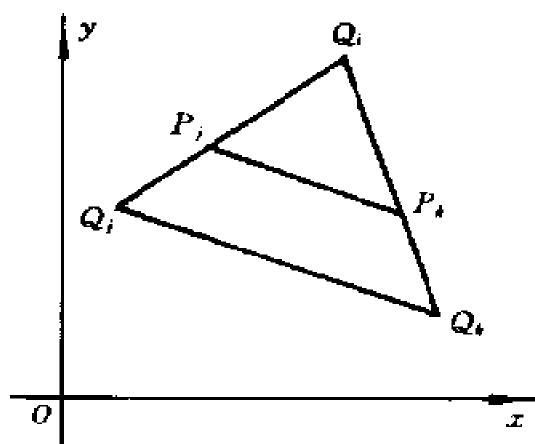


图 13—15

区域 OAB，见图13-14. 事实上，由(13.55)式，$0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$. 对给定的 $\lambda_i\in[0,1]$，在三角形 S 中，满足(13.55)的点 Q 的全体组成平行于 Q_jQ_k 的线段 P_jP_k，如图13-15. 不难看出，在此线段上 λ_j 由0变到 $(1-\lambda_i)$. 因此，xy 平面上的区域 S 在 $\lambda_i\lambda_j$ 平面上的象为三角形 OAB.

对任意 $l_1,l_2,l_3\in N$，借助于变换(13.58)得到

$$\begin{aligned}
&\iint_S \lambda_i^{l_1}\lambda_j^{l_2}\lambda_k^{l_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}\lambda_i\int_0^{1-\lambda_i}\lambda_i^{l_1}\lambda_j^{l_2}(1-\lambda_i-\lambda_j)^{l_3}\left|\frac{D(x,y)}{D(\lambda_i,\lambda_j)}\right|\mathrm{d}\lambda_j \\
&= 2\Delta_S\int_0^1 \mathrm{d}\lambda_i\int_0^{1-\lambda_i}\lambda_i^{l_1}\lambda_j^{l_2}(1-\lambda_i-\lambda_j)^{l_3}\mathrm{d}\lambda_j.
\end{aligned}$$

作置换 $\lambda_j=(1-\lambda_i)t$，并利用 Euler 积分公式

$$\int_0^1 t^m(1-t)^n\mathrm{d}t = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

得到

$$\begin{aligned}
&\iint_S \lambda_i^{l_1}\lambda_j^{l_2}\lambda_k^{l_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\Delta_S\int_0^1 \mathrm{d}\lambda_i\int_0^1\lambda_i^{l_1}(1-\lambda_i)^{l_2+l_3+1}t^{l_2}(1-t)^{l_3}\mathrm{d}t \\
&= 2\Delta_S\frac{l_2!l_3!}{(l_2+l_3+1)!}\int_0^1\lambda_i^{l_1}(1-\lambda_i)^{l_2+l_3+1}\mathrm{d}\lambda_i \\
&= 2\Delta_S\frac{l_2!l_3!}{(l_2+l_3+1)!}\,\frac{l_1!(l_2+l_3+1)!}{(l_1+l_2+l_3+2)!} \\
&= \frac{l_1!l_2!l_3!}{(l_1+l_2+l_3+2)!}2\Delta_S.
\end{aligned} \tag{13.59}$$

现在考察积分(13.52). 在 S 上用 $w(x,y)$ 近似 $u(x,y)$，由于

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}u_i+\frac{\partial\lambda_j}{\partial x}u_j+\frac{\partial\lambda_k}{\partial x}u_k$$

$$= \frac{1}{2\Delta_S}(a_i u_i + a_j u_j + a_k u_k),$$

所以

$$\iint_S p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4\Delta_S^2}(a_i u_i + a_j u_j + a_k u_k)^2 \iint_S p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

上式右端已知函数 $p(x,y)$的积分可用数值积分方法计算.最简单的方法是将 $p(x,y)$在 S 上视为常数 p_s,其中 p_s 是 $p(x,y)$在 S 上某一点的值.于是近似地有

$$\iint_S p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = U_S^T K_{S1} U_S, \tag{13.60}$$

其中

$$U_S = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}, \quad K_{S1} = \frac{p_s}{4\Delta_S}\begin{bmatrix} a_i a_i & a_i a_j & a_i a_k \\ a_j a_i & a_j a_j & a_j a_k \\ a_k a_i & a_k a_j & a_k a_k \end{bmatrix}.$$

同理,近似地有

$$\iint_S p\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = U_S^T K_{S2} U_S, \tag{13.61}$$

其中

$$K_{S2} = \frac{p_s}{4\Delta_S}\begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix}.$$

由于

$$w^2 = (\lambda_i u_i + \lambda_j u_j + \lambda_k u_k)^2,$$

所以

$$\iint_S q w^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S q(\lambda_i u_i + \lambda_j u_j + \lambda_k u_k)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在 S 上把 q 视为常数 q_s,利用(13.59)式可计算出上式积分为

$$\iint_S q w^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = U_S^T K_{S3} U_S, \tag{13.62}$$

其中

$$K_{S3}=\frac{q_s\Delta_S}{12}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

同样地，在 S 上把 f 视为常数 f_S，利用(13.59)式可得

$$\iint_S fw\mathrm{d}x\mathrm{d}y=F_S^TU_S, \tag{13.63}$$

其中

$$F_S=\frac{f_S\Delta_S}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

将(13.60)～(13.63)式代入(13.52)，得到

$$I_S=U_S^TK_SU_S-2F_S^TU_S, \tag{13.64}$$

其中

$$K_S=K_{S1}+K_{S2}+K_{S3}.$$

借用力学术语，K_S 和 F_S 分别称为 S 上的**单元刚度矩阵**和**单元载荷向量**.

四、线单元分析

设线单元 L 两端点分别为(x_m,y_m)和(x_n,y_n)，对应的函数值为 u_m 和 u_n，L 之长为 l. 作线性插值函数.

$$w(x,y)=\mu_mu_m+\mu_nu_n,\quad (x,y)\in L,$$

其中插值基函数

$$\mu_m=\frac{1}{l}\left[l-\sqrt{(x-x_m)^2+(y-y_m)^2}\right],$$

$$\mu_n=\frac{1}{l}\sqrt{(x-x_m)^2+(y-y_m)^2}.$$

若在 L 上将函数 ω 和 ψ 分别视为常数 ω_L 和 ψ_L，并用 $w(x,y)$ 近似 $u(x,y)$，则不难求得

$$I_L = \int_L (\omega w^2 - 2\psi w)\mathrm{d}s$$

$$= \int_L [\omega_L(\mu_m u_m + \mu_n u_n)^2 - 2\psi_L(\mu_m u_m + \mu_n u_n)]\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{3}\omega_L l(u_m^2 + u_m u_n + u_n^2) - \psi_L l(u_m + u_n). \qquad (13.65)$$

记

$$K_L = \frac{\omega_L l}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, F_L = \frac{\psi_L l}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, U_L = \begin{bmatrix} u_m \\ u_n \end{bmatrix},$$

则(13.65)式可写成

$$I_L = U_L^T K_L U_L - 2F_L^T U_L, \qquad (13.66)$$

其中 K_L 和 F_L 分别称为 L 上的单元刚度矩阵和单元载荷向量.

五、总体合成与基本方程组

综合(13.64)和(13.66)得到泛函 $J(u)$ 的近似表达式

$$J(u) = \sum_{S \in D_h}(U_S^T K_S U_S - 2F_S^T U_S) + \sum_{L \in \Gamma_h}(U_L K_L U_L - 2F_L^T U_L) \qquad (13.67)$$

给区域 $\overline{D}$ 上诸面单元的全部顶点编号:1,2,…,N_0, N_0为面单元顶点的总数. 给 D 内的全部面单元编号:1,2,…,N_1, N_1为面单元的总个数. 给 $\overline{D}$ 上的全部线单元编号1,2,…,N_2, N_2为线单元的总个数. 为了与前面用过的符号相一致,我们将用 S 既表示一个面单元,又表示这个面单元的编号,因此 $S=1,2,\cdots,N_1$;用 L 既表示一个线单元,又表示这个线单元的编号,因此 $L=1,2,\cdots,N_2$.

设面单元 S 的三个顶点编号为 i,j,k. 引进矩阵 $P_S=(p_{ij})\in \mathbb{R}^{3\times N_0}$, P_S 中除 $p_{1i}=p_{2j}=p_{3k}=1$之外,其余元素皆为零. 设线单元 L 的两个顶点编号为 m,n. 引进矩阵 $P_L=(p_{ij})\in \mathbb{R}^{2\times N_0}$, P_L 中除 $p_{1m}=p_{2n}=1$之外,其余元素皆为零. P_S 和 P_L 称为**选择矩阵**. 记

$$U = (u_1, u_2, \cdots, u_{N_0})^T,$$

则有

$$U_S = P_S U, \quad U_L = P_L U.$$

于是,(13.67)式可写成

$$J(u) = \sum_{S=1}^{N_1} (U^T P_S^T K_S P_S U - 2F_S^T P_S U)$$
$$+ \sum_{L=1}^{N_2} (U^T P_L^T K_L P_L U - 2F_L^T P_L U).$$

若记

$$K = \sum_{S=1}^{N_1} P_S^T K_S P_S + \sum_{L=1}^{N_2} P_L^T K_L P_L,$$

$$F = \left(\sum_{S=1}^{N_1} F_S^T P_S + \sum_{L=1}^{N_2} F_L^T P_L \right)^T.$$

并分别称为总体刚度矩阵和总体载荷向量,则(13.67)式又可表为

$$J(u) = U^T K U - 2F^T U. \qquad (13.68)$$

于是,泛函 $J(u)$ 被简化为 $u_1, u_2 \cdots, u_{N_0}$ 的二次函数. 其极小值是线性方程组

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(U^T K U - 2F^T U) = 0, \ i = 1, 2, \cdots, N_0 \qquad (13.69)$$

即

$$KU = F \qquad (13.70)$$

的解. 通常称(13.70)为基本方程组. 解此方程组便求得使 $J(u)$ 取极小值的函数 $u(x, y)$ 在节点处的近似值. 这也就是边值问题(13.46)的解 $u(x, y)$ 在节点处的近似值.

可以证明,按上述方法求得的数值解其截断误差为 $O(h)$;当 $h \to 0$ 时数值解收敛于准确解(参见[20]).

综合以上讨论,用有限元方法解定解问题(13.46)的步骤如下:

(1) 区域剖分，对节点统一编号，并确定其坐标；

(2) 计算单元刚度矩阵及单元载荷向量；

(3) 构成总体刚度矩阵及总体载荷向量，并列出基本方程组；

(4) 解基本方程组，求出数值解.

值得指出的是，强加边界条件

$$u|_{\Gamma_1} = \varphi$$

给出了边界线 Γ_1 上的 u 值，从而(13.68)式中位于 Γ_1 上节点处 u 的值是已知的. 因此，在(13.69)式中不应含有对这些节点处的 u_i 求导，基本方程组(13.70)实际上达不到 N_0 阶.

例 13.2 用有限元方法解边值问题

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=3, & (x,y)\in D, \\ u|_{\Gamma_1}=0, & \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2}=0. \end{cases}$$

其中 D 是以(0,0)，(4,0)，(2,4)为顶点的三角形区域，Γ_1 为底边，Γ_2 为其余两边

解 相应的泛函为

$$J(u) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 6u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

区域剖分及节点编号如图15-16所示，各单元的面积 $\Delta_{s_i}=2$，$i=1,2,3,4$.

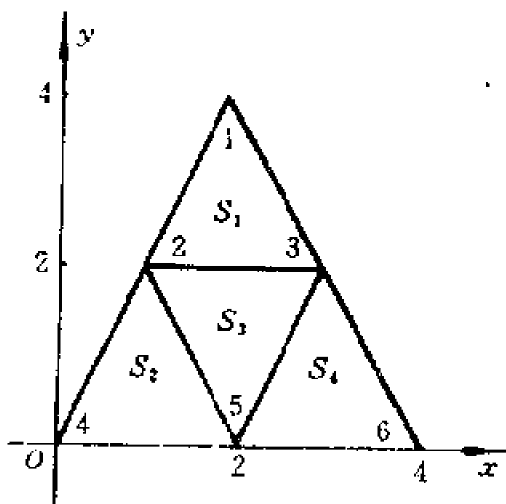


图 13-16

首先计算各面单元的刚度矩阵与载荷向量.

在 S_1 上，刚度矩阵为

$$K_{s_1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}(1) & (2) & (3)\end{matrix}$$

此处矩阵下方及右方的标号指明 K_{S_1} 中元素在总体刚度矩阵中的位置. 载荷向量为

$$F_{S_1} = 2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}.$$

其中向量右方的标号指明 F_{S_1} 中分量在总体载荷向量中的位置.

在 S_2 上, 刚度矩阵

$$K_{S_2} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & -2 & -2\\-2 & 5 & -3\\-2 & -3 & 5\end{bmatrix}\begin{matrix}(2)\\(4)\\(5)\end{matrix},$$
$$\begin{matrix}(2) & (4) & (5)\end{matrix}$$

载荷向量

$$F_{S_2} = 2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{matrix}(2)\\(4)\\(5)\end{matrix}.$$

在 S_3 上, 刚度矩阵和载荷向量分别为

$$K_{S_3} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}5 & -2 & -3\\-2 & 4 & -2\\-3 & -2 & 5\end{bmatrix}\begin{matrix}(2)\\(5)\\(3)\end{matrix},$$
$$\begin{matrix}(2) & (5) & (3)\end{matrix}$$

$$F_{S_3} = 2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{matrix}(2)\\(5)\\(3)\end{matrix}.$$

在 S_4 上, 刚度矩阵和载荷向量分别为

$$K_{S_4} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & -2 & -2\\-2 & 5 & -3\\-2 & -3 & 5\end{bmatrix}\begin{matrix}(3)\\(5)\\(6)\end{matrix},$$
$$\begin{matrix}(3) & (5) & (6)\end{matrix}$$

$$F_{S_4}=2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{matrix}(3)\\(5)\\(6)\end{matrix}.$$

因为 $\omega=0,\psi=0$,所以每个线单元上的刚度矩阵与载荷向量分别是零矩阵和零向量.

为形成总体刚度矩阵和总体载荷向量,将每个单元刚度矩阵扩充为6阶矩阵,每个单元载荷向量扩充为6维向量,然后求和,即总体刚度矩阵为

$$K=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4&-2&-2&0&0&0\\-2&5&-3&0&0&0\\-2&-3&5&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{8}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&4&0&-2&-2&0\\0&0&0&0&0&0\\0&-2&0&5&-3&0\\0&-2&0&-3&5&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{8}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&5&-3&0&-2&0\\0&-3&5&0&-2&0\\0&0&0&0&0&0\\0&-2&-2&0&4&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{8}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&4&0&-2&-2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&-2&0&5&-3\\0&0&-2&0&-3&5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4&-2&-2&0&0&0\\-2&14&-6&-2&-4&0\\-2&-6&14&0&-4&-2\\0&-2&0&5&-3&0\\0&-4&-4&-3&14&-3\\0&0&-2&0&-3&5\end{bmatrix}.$$

总体载荷向量为

$$F = 2\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\3\\3\\1\\3\\1\end{bmatrix}.$$

代入基本方程组(13.70).因为 u_4,u_5和 u_6都是已知的,所以方程组中第4,5,6个方程不存在,只有前三个方程.再注意到 $u_4 = u_5 = u_6 = 0$,得到方程组

$$\begin{bmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -6\\ -2 & -6 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} = 16\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}.$$

解此方程组得到数值解

$$u_1 = 13.3333, \quad u_2 = u_3 = 9.3333.$$

与差分方法比较,有限元方法对求解区域的剖分灵活性大,节点的疏密可以不均匀,这是差分方法很难做到的.此外,有限元方法处理自然边界条件

$$\left(p\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right)_{\Gamma_2} = \psi,$$

只需计算 Γ_2上线单元的刚度矩阵及载荷向量,并把它们累加到总体刚度矩阵及载荷向量上.而差分方法处理这类边界条件却很麻烦.由于有限元方法具有这些优点,在微分方程、边界条件和求解区域比较复杂的问题中,有限元方法得到了广泛的应用.

这里仅针对边值问题(13.46)给出了有限元方法.用有限元方法解其它边值问题,首先必须导出等价的变分问题,对求解区域选择适当的剖分方法,如三角形剖分,四边形剖分等,确定适当的插值函数和积分的计算方法.再推出单元刚度矩阵及载荷向量的计算公式.详细的讨论请参看文献[26]和[27].

习 题 十 三

1. 写出用五点菱形格式解边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & (x,y)\in D\\ u|_\Gamma=1-x^2-y^2\end{cases}$$

的差分方程，其中区域 $D=\{(x,y)\mid(x-3)^2+(y-4)^2<4\}$，取步长 $h_1=h_2=1$.

2. 用五点菱形格式解边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & 0<x<4,0<y<3\\ u|_{x=0}=y(3-y), & u|_{x=4}=0\\ u|_{y=0}=\sin\dfrac{\pi x}{4}, & u|_{y=3}=0\end{cases},$$

取步长 $h_1=h_2=1$.

3. 用五点菱形格式解边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-1, & (x,y)\in D\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+u\right)_\Gamma=0,\end{cases}$$

其中 Γ 为区域 $D=\{(x,y)\mid-1<x<1,-1<y<1\}$的边界，取步长 $h_1=h_2=\dfrac{2}{3}$.

4. 写出用最简显格式解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=e^x\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right), & 0<x<1,t>0\\ u|_{t=0}=4x(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=0, & t\geqslant 0\end{cases}$$

的差分格式.

5. 用最简显格式解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<1, t>0\\ u|_{t=0}=x(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0, & t\geqslant 0\end{cases}$$

取步长 $h=0.2$，$\tau=0.1$，计算出 $n=1,2$层的数值解.

6. 用三层显格式解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<1, \quad t>0\\ u|_{t=0}=\sin\pi x, \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=x(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0, & t\geqslant 0,\end{cases}$$

取步长 $h=0.2$，$\tau=0.2$，计算出 $n=1,2,3$层的数值解.

7. 用有限元方法解边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-12u=-18xy-2, & (x,y)\in D\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+3u\right)_\Gamma=0\end{cases},$$

其中 $D=\{(x,y)|0<x<1,0<y<1\}$，Γ 为 D 的边界，用对角线将 D 分为两个三角形.

附录一　$J_n(x)$ $(n=0,1,2,\cdots,5)$的正零点 $\mu_i^{(n)}$ $(i=1,2,\cdots,9)$的近似值

$\mu_i^{(n)}$ i \ n	0	1	2	3	4	5
1	2.405	3.832	5.136	6.380	7.588	8.771
2	5.520	7.016	8.417	9.761	11.065	12.339
3	8.654	10.173	11.620	13.015	14.373	15.700
4	11.792	13.324	14.796	16.223	17.616	18.980
5	14.931	16.471	17.960	19.409	20.827	22.218
6	18.071	19.616	21.117	22.583	24.019	25.430
7	21.212	22.760	24.270	25.748	27.199	28.627
8	24.352	25.904	27.421	28.908	30.371	31.812
9	27.493	29.047	30.569	32.065	33.537	34.989

附录二 Fourier 变换与 Laplace 变换简表

一、Fourier 变换

	象原函数	象函数
1	$f(x)$	$F(\omega)$
2	$f'(x)$	$(i\omega)F(\omega)$
3	$f^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n F(\omega)$
4	$f(x)e^{iax}$	$F(\omega-a)$
5	$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(x-\tau)d\tau$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$，其中 $F_i(\omega)$ 是 $f_i(x)$ 的傅氏变换
6	$f(x)=\begin{cases} h, & -\tau<x<\tau \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$2h\dfrac{\sin\omega\tau}{\omega}$
7	$\delta(x)$	1
8	单位函数 $u(x)$	$\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$
9	$u(x)e^{-ax}, a>0$	$\dfrac{1}{a+i\omega}$
10	$e^{-a\|x\|}, a>0$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
11	$u(x)x$	$\dfrac{1}{(i\omega)^2}$

	象原函数	象函数
12	$u(x)\sin ax$	$\frac{a}{a^2-\omega^2}$
13	$u(x)\cos ax$	$\frac{-i\omega}{a^2-\omega^2}$
14	$\cos ax$	$\pi[\delta(\omega-a)+\delta(\omega+a)]$
15	$\sin ax$	$i\pi[\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)]$
16	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-x^2/2\sigma^2}$	$e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$
17	$\frac{1}{a^2+x^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$	$-\frac{\pi}{a}e^{a\vert\omega\vert}$

二、Laplace 变换

	象 原 函 数	象 函 数
1	$f(t)$	$F(p)$
2	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - [p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)]$
3	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$
4	$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
5	$f(t-\tau)$	$\mathrm{e}^{-p\tau} F(p)$
6	$\mathrm{e}^{p_0 t} f(t)$	$F(p-p_0)$
7	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$F_1(p)F_2(p)$,其中 $F_i(p)$是 $f_i(t)$的拉氏变换
8	$\delta(t)$	1
9	$\mathrm{u}(t)$	$\frac{1}{p}$
10	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
11	$t^n \quad (n>-1)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$
12	$\sin kt$	$\frac{k}{p^2+k^2}$
13	$\cos kt$	$\frac{p}{p^2+k^2}$
14	$\mathrm{sh}\, kt$	$\frac{k}{p^2-k^2}$

	象原函数	象函数
15	$\mathrm{ch}\,kt$	$\dfrac{p}{p^2-k^2}$
16	$\mathrm{e}^{-at}\sin kt$	$\dfrac{k}{(p+a)^2+k^2}$
17	$\mathrm{e}^{-at}\cos kt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+k^2}$
18	$\mathrm{e}^{-at}t^n \quad (n>-1)$	$\dfrac{\Gamma(n+1)}{(p+a)^{n+1}}$
19	$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p^3}}$
20	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$
21	$\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{bt} \quad (a>b)$	$\dfrac{a-b}{(p-a)(p-b)}$
22	$\dfrac{1}{a}\sin at-\dfrac{1}{b}\sin bt$	$\dfrac{b^2-a^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
23	$\cos at-\cos bt$	$\dfrac{(b^2-a^2)p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
24	$\mathrm{J}_0(t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
25	$\mathrm{J}_0(2\sqrt{t})$	$\dfrac{2}{p}\mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}$
26	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-2a\sqrt{t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{a^2/p}\mathrm{erfc}\left(\dfrac{a}{\sqrt{p}}\right)$

	象原函数	象函数
27	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{kt}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{k}{p}}$
28	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin 2\sqrt{kt}$	$\frac{1}{p^{3/2}}e^{-\frac{k}{p}}$
29	$\mathrm{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{p}e^{-k\sqrt{p}}$ $(k\geqslant 0)$
30	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-k^2/4t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-k\sqrt{p}}$
31	$\mathrm{erf}(\sqrt{at})$	$\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}$
32	$e^t\mathrm{erfc}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{p+\sqrt{p}}$
33	$J_n(at)$ $(\mathrm{Re}\,a>-1)$	$\frac{a^n}{\sqrt{a^2+p^2}}\left(\frac{1}{p+\sqrt{a^2+p^2}}\right)^n$

误差函数 $\mathrm{erf}(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-t^2}dt$

$\mathrm{erf}(\infty)=1$

$\mathrm{erf}(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(y-\frac{y^3}{1!3}+\frac{y^5}{2!5}-\frac{y^7}{3!7}+\cdots\right)$

余误差函数 $\mathrm{erfc}(y)=1-\mathrm{erf}(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_y^{\infty}e^{-t^2}dt$

附录三　习题答案

习　题　七

1. $L_4(x)=0.83333x^4-39.16667x^3+681.66667x-5198.33333x$
$+14860.00000$

3. (1) $e^{-0.14}\approx0.869534$，$|R_1(0.14)|\leqslant0.000362$；
(2) $e^{-0.23}\approx0.794549$，$|R_2(0.23)|\leqslant0.000096$.

4. (1) $f(x)\approx L_1(x)=\dfrac{1}{2}[(x-6)y_3-(x-8)y_2]$，

$f(x)\approx L_1(x)=\dfrac{1}{2}[(x-10)y_5-(x-12)y_4]$；

(2) $f(x)\approx L_2(x)=\dfrac{1}{8}[(x-8)(x-10)y_2-2(x-6)(x-10)y_3+(x-6)(x-8)y_4]$，

$f(x)\approx L_2(x)=\dfrac{1}{8}[(x-12)(x-14)y_4-2(x-10)(x-14)y_5+(x-10)(x-12)y_6]$；

(3) $f(x)\approx L_3(x)=\dfrac{1}{48}[-(x-6)(x-8)(x-10)y_1+3(x-4)(x-8)(x-10)y_2-3(x-4)(x-6)(x-10)y_3+(x-4)(x-6)(x-8)y_4]$，

$f(x)\approx L_3(x)=\dfrac{1}{48}[-(x-10)(x-12)(x-14)y_3+3(x-8)(x-12)(x-14)y_4-3(x-8)(x-10)(x-14)y_5+(x-8)(x-10)(x-12)y_6]$.

5. 1.0.

7. $f(75.54)\approx2.80234$，$f(81.12)\approx3.26835$.

9. $f(0.05)\approx1.05126$，$f(0.65)\approx1.91555$.

10. $H_3(x)=-3x^3+13x^2-17x+9$，$f(1.2)=2.136$.

11. $H_5(x)=156.25(64.8x-319.6)(x-5.2)^2(x-5.4)^2+625(9.0-x)(x-5.0)^2(x-5.4)^2+156.25(265.64-48.6x)(x-5.0)^2(x-5.2)^2$，$f(5.1)\approx4.0015625$.

12. $p(x)=\dfrac{5}{2}x^4-12x^3+\dfrac{35}{2}x^2-7x+1$.

13. (1) $S(x)=\begin{cases} -900x^3+550x^2-82x+5.6 & x\in[0.1,0.2] \\ -1100x^3+670x^2-106x+7.2 & x\in[0.2,0.3] \end{cases}$;

(2) $S(x)=\begin{cases} -\frac{5}{12}x^3+\frac{1}{8}x^2+\frac{2399}{120}x & x\in[0.1,0.2] \\ -\frac{5}{12}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{4789}{240}x+\frac{1}{400} & x\in[0.2,0.3] \end{cases}$.

习　题　八

1. (1) $A_0=\frac{1}{3}$，$A_1=\frac{4}{3}$，$A_2=\frac{1}{3}$，3次；

   (2) $A=\frac{1}{3}$，$x_1=\frac{1\pm\sqrt{6}}{5}$，$x_2=\frac{3\mp2\sqrt{6}}{15}$，2次；

   (3) $A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{3}{2}$，$x_1=\frac{1}{3}$，2次.

2. (1) $T_5=0.26853$，$S_5=0.27220$；

   (2) $T_6=1.88570$，$S_6=1.88506$；

   (3) $T_8=2.98136$，$S_8=2.92545$.

3. (1) 0.27220；(2) 0.6576699.

5. (1) $x_0=\frac{1}{7}\left(3-2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$，$x_1=\frac{1}{7}\left(3+2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$，$A_0=1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$，

   $A_1=1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$；

   (2) $x_0=\frac{1}{14}\left(5-\frac{\sqrt{106}}{3}\right)$，$x_1=\frac{1}{14}\left(5+\frac{\sqrt{106}}{3}\right)$，$A_0=\frac{1}{2}+\frac{9}{4\sqrt{106}}$，

   $A_1=\frac{1}{2}-\frac{9}{4\sqrt{106}}$.

6. (1) 1.462270，(2) 10.948405.

7. (1) 0.781891，(2) 0.199984.

8. (1) 1.382033，(2) 3.977322.

9. $f'(1.0)=-0.247$，$f'(1.1)=-0.217$，$f'(1.4)=-0.143$.

10. $f''(0.50)=-0.5$，$f''(0.52)=-0.5$，$f''(0.55)=-0.6$.

习 题 九

1. (1)

x_n	y_n	x_n	y_n
0.1	0.00000	0.6	0.05511
0.2	0.00100	0.7	0.09142
0.3	0.00500	0.8	0.14125
0.4	0.01400	0.9	0.20725
0.5	0.03002	1.0	0.29254

(2)

x_n	y_n	x_n	y_n
1.5	−0.50000	2.5	−0.64410
2.0	−0.58333	3.0	−0.68994

2. (1)

x_n	y_n	x_n	y_n
0.1	0.00050	0.6	0.07344
0.2	0.00300	0.7	0.11681
0.3	0.00950	0.8	0.17539
0.4	0.02202	0.9	0.25237
0.5	0.04262	1.0	0.35183

(2)

x_n	y_n	x_n	y_n
0.1	1.09591	0.6	1.48597
0.2	1.18410	0.7	1.55253
0.3	1.26621	0.8	1.61649
0.4	1.34337	0.9	1.67818
0.5	1.41641	1.0	1.73788

3. (1)

x_n	y_n	x_n	y_n
0.2	1.72755	0.8	5.82921
0.4	2.74295	1.0	7.99601
0.6	4.09418		

(2)

x_n	y_n	x_n	y_n
0.1	0.83174	0.4	0.60696
0.2	0.70678	0.5	0.61594
0.3	0.63592		

5. $0<h\leqslant 0.2$

6.
$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4), \\ z_{n+1}=z_n+\frac{h}{6}(L_1+2L_2+2L_3+L_4), \\ K_1=-8y_n+7z_n, \\ L_1=x_n^2+y_nz_n, \\ K_2=-8(y_n-\frac{h}{2}K_1)+7(z_n+\frac{h}{2}L_1), \\ L_2=(x_n+\frac{h}{2})^2+(y_n+\frac{h}{2}K_1)(z_n+\frac{h}{2}L_1), \\ K_3=-8(y_n+\frac{h}{2}K_2)+7(z_n+\frac{h}{2}L_2), \\ L_3=(x_n+\frac{h}{2})^2+(y_n+\frac{h}{2}K_2)(z_n+\frac{h}{2}L_2), \\ K_4=-8(y_n+hK_3)+7(z_n+hL_3), \\ L_4=(x_n+h)^2+(y_n+hK_3)(z_n+hL_3). \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hz_n, \\ z_{n+1}=z_n-h\sin y_n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(K_1+K_2), \\ z_{n+1}=z_n+\frac{h}{2}(L_1+L_2), \\ K_1=z_n, \\ L_1=-\sin y_n, \\ K_2=z_n+hL_1, \\ L_2=-\sin(y_n+hK_1). \end{cases}$$

8.

x_n	y_n	x_n	y_n
0.1	1.0746	0.6	1.7908
0.2	1.1701	0.7	2.0285
0.3	1.2877	0.8	2.3013
0.4	1.4294	0.9	2.6291
0.5	1.5976		

9. (1) $\begin{cases} 25y_{n-1}-(50-0.16n^2)y_n+25y_{n+1}=1+0.4n, \ (n=1,2,\cdots,9), \\ -3y_0+4y_1-y_2=0.4, \\ y_{10}=2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (n^2-0.5n+25)y_{n+1}-(2n^2-0.5n+50)y_n \\ \quad +(25+n^2)y_{n-1}=1.2n-3, \quad (n=1,2,3,4), \\ 8.5y_0-10y_1+2.5y_2=1, \\ y_5=2. \end{cases}$

习 题 十

4. (1) 狭义双曲型；

(2) 当 $x>0$ 且 $y>0$ 时方程为椭圆型，当 $xy<0$ 时为狭义双曲型，当 $x<0$ 且 $y<0$ 时为超双曲型，当 $xy=0$ 时为抛物型.

5. (1) 当 $x<0$ 时为双曲型，$u_{\xi\eta}=\dfrac{u_\xi-u_\eta}{6(\xi-\eta)}$，$(\xi>\eta)$ 或 $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}=\dfrac{u_\eta}{3\eta}$；

当 $x=0$ 时为抛物型，$u_{xx}=0$；

当 $x>0$ 时为椭圆型，$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\dfrac{1}{3\eta}u_\eta=0$.

(2)在二、四象限内为双曲型，

$$u_{\xi\eta}+\frac{u_\xi+u_\eta}{6(\xi+\eta)}-\frac{u_\xi-u_\eta}{6(\xi-\eta)}=0 \text{ 或 } u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+\frac{1}{3}\left(\frac{u_\xi}{\xi}-\frac{u_\eta}{\eta}\right)=0;$$

在一、三象限内为椭圆型，

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}u_\xi+\frac{1}{3\eta}u_\eta=0;$$

在 x 轴或 y 轴上为抛物型.

(3) 在 x 轴或 y 轴上为抛物型，

在其余地方为椭圆型，

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{u_\xi}{2\xi}+\frac{u_\eta}{2\eta}=0.$$

8. $u_{tt}+ku_t=a^2u_{xx}$.

9. $u_t=a^2\Delta u$, $a^2=D$.

10. $\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0\\ u|_{x=0}=0,\ u_x|_{x=l}=0,\ t\geqslant 0\\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=v_0,\ 0<x<l.\end{cases}$

11. $\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0\\ u_x|_{x=0}=-q_0/k,\ u_x|_{x=l}=q_0/k,\ x\geqslant 0\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ 0<x<l.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\Delta u=0,\ (x,y,z)\in\Omega\\ u|_{x^2+y^2=a^2}=0,\ u|_{z=0}=0,\ u|_{z=h}=f(x,y).\end{cases}$

13. $\begin{cases}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\dfrac{\partial u}{\partial\theta})+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=f(r,\theta,\varphi)\\ u|_{r=a}=g(\theta,\varphi).\end{cases}$

14. $\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\ 0<x<x_0,\ 0<y<y_0,\ t>0\\ u|_{x=0}=u|_{x=x_0}=u|_{y=0}=u|_{y=y_0}=0,\ t\geqslant 0\\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y),\ 0<x<x_0,\ 0<y<y_0.\end{cases}$

习 题 十 一

1. $u(x,t)=\dfrac{8l^3}{\pi^4 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^4}\sin\dfrac{(2k-1)\pi at}{l}\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{l}x.$

2. $u(x,t)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{2\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\dfrac{2\pi}{l}x.$

3. (1) $u(x,t)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{1-4k^2}\cos 2kat\cos 2kx;$

   (2) $u(x,t)=\dfrac{l}{2}-\dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}\mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k-1)\pi a}{l}\right)^2 t}\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{l}x.$

4. (1) $u(x,t)=\dfrac{32l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(2n-3)^2(2n+1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi at}{2l}\cdot\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}x;$

   (2) $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{(2n-1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}x,$

其中 $c_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\mathrm{d}x.$

5. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{a\nu_n}{l}\right)^2 t}\cos\frac{\nu_n x}{l},$

其中 $c_n = \frac{\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{\nu_n x}{l}\mathrm{d}x}{\int_0^l \cos^2\frac{\nu_n x}{l}\mathrm{d}x}$, ν_n 是 $\mathrm{tg}\nu = \frac{lh}{\nu}$ 的正根.

6. (1) $u(x,t) = \frac{8l^4}{\pi^5 a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^5}\left[1-\cos\frac{(2k-1)\pi at}{l}\right]\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x;$

(2) $u(x,t) = \frac{l}{3\pi a}\left(\frac{2l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi at}{2l} - t\cos\frac{3\pi at}{2l}\right)\sin\frac{3\pi x}{2l};$

(3) $u(x,t) = \frac{A}{\omega}(2-\cos\omega t).$

7. (1) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{e}^{-kt}\sin\beta_n t\sin\frac{n\pi}{l}x,$

其中 $b_n = \frac{2}{l\beta_n}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ \beta_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 - k^2};$

(2) $u(x,t) = \frac{2gl^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n(n^2\pi^2 a^2+b^2 l^2)}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2 a^2+b^2 l^2}{l^2}t}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$

8. (1) $u(x,t) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + \left(\frac{Al}{2a^2}+\frac{B}{l}\right)x$

$+ 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{Al^2[(-1)^n-1]}{n^3\pi^3 a^2} + \frac{(-1)^n B}{n\pi}\right\}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l};$

(2) $u(x,t) = -\frac{q}{lk}x^2 + \frac{q}{k}x + A - \frac{lq}{6k} - \frac{2a^2 q}{lk}t$

$+ \frac{lq}{k\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-\left(\frac{2n\pi a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{2n\pi}{l}x.$

9. (1) $u(x,y) = \frac{Ab}{2a}x - \frac{4Ab}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}[(2k-1)\pi x/b]}{(2k-1)^3\mathrm{sh}[(2k-1)\pi a/b]}\cos\frac{(2k-1)\pi}{b}y;$

(2) $u(x,y) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\left(y - \frac{\mathrm{sh}[(2k-1)\pi y]}{\mathrm{sh}[(2k-1)\pi]}\right)\sin(2k-1)\pi x.$

10. $u(x,y) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\mathrm{e}^{-\frac{(2k-1)\pi}{a}y}\sin\frac{(2k-1)\pi}{a}x.$

11. $u(\rho,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^{\frac{n\pi}{\beta}}\sin\frac{n\pi}{\beta}\theta,$

其中 $c_n = \dfrac{2a^{-\frac{n\pi}{\beta}}}{\beta} \displaystyle\int_0^{\beta} f(\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{\beta}\mathrm{d}\theta.$

12. $u(x,y) = \dfrac{1}{9}(x^2+y^2)^{3/2} + \dfrac{17}{9}.$

13. $u(\rho,\theta) = \dfrac{-1}{a^4+b^4}[(a^6+2b^6)\rho^2 + a^4b^4(a^2-2b^2)\rho^{-2} - (a^4+b^4)\rho^4]\cos 2\theta.$

14. (1) $u(r,\theta) = \dfrac{A}{2}(1-\cos\alpha) + \dfrac{3A}{4}\sin^2\alpha\, \mathrm{p}_1(\cos\theta)r$

$+ \dfrac{5A}{4}\cos\alpha\sin^2\alpha\, \mathrm{p}_2(\cos\theta)r^2 + \cdots;$

(2) $u(r,\theta) = Ar\cos\theta + c_0$，$c_0$ 为任意常数.

16. $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{J}_1(\alpha_k)}{2\alpha_k \mathrm{J}_1^2(2\alpha_k)}\mathrm{J}_0(\alpha_k x).$

17. $u(\rho,z) = \dfrac{2Rq_0}{k}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\mu_m}{R}(H-z)\right]}{\mu_m^2 \mathrm{J}_1(\mu_m)\mathrm{ch}\left(\frac{\mu_m H}{R}\right)}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_m}{R}\rho\right).$

18. $u(r,t) = \dfrac{-4R}{a}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu_k^{(1)})^3 \mathrm{J}_0(\mu_k^{(1)})}\sin\frac{a\mu_k^{(1)}t}{R}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{R}r\right).$

习 题 十 二

1. (1) $u(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{6} + x^2 - \dfrac{y^2}{6} + \cos y - 1;$

(2) $u(x,y) = \dfrac{3}{4}\sin\left(x-\dfrac{y}{3}\right) + \dfrac{1}{4}\sin(x+y) + xy + \dfrac{1}{3}y^2.$

2. (1) 当 $|x-at| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 且 $|x+at| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时，$u(x,y) = \cos x\cos at$，

当 $|x-at| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 且 $|x-at| > \dfrac{\pi}{2}$ 时，$u(x,y) = \dfrac{1}{2}\cos(x-at)$，

当 $|x-at| > \dfrac{\pi}{2}$ 且 $|x+at| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时，$u(x,y) = \dfrac{1}{2}\cos(x+at)$，

当 $|x-at| > \dfrac{\pi}{2}$ 且 $|x+at| > \dfrac{\pi}{2}$ 时，$u(x,y) = 0;$

(2) $u(x,y) = \sin x\cos at + x^2t + \dfrac{1}{3}a^2t^3.$

3. $u(x,t) = \varphi(x-at).$

4. $u(x,t) = t\sin x.$

5. $u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\sin x\sin at, & t<\dfrac{x}{a}\\ \dfrac{1}{a}(1-\cos x\cos at), & t\geqslant\dfrac{x}{a}\end{cases}\quad(x\leqslant 0).$

6. $u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{aA}{\omega}\left[\cos\omega\left(t-\dfrac{x}{a}\right)-1\right], & t>\dfrac{x}{a}\\ 0, & t\leqslant\dfrac{x}{a}\end{cases}.$

7. (1) $u(x,y,z,t)=x^3+3a^2t^2x$;

(2) $u(x,y,t)=x^2(x+y)+a^2t^2(3x+y)$.

9. (1) $u(x,y)=\dfrac{x}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\varphi(\tau)}{x^2+(y-\tau)^2}\mathrm{d}\tau$;

(2) $u(x,t)=b\,\mathrm{e}^{-ht}\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)$;

(3) $u(x,t)=10\mathrm{e}^{-16\pi^2t}\sin 2\pi x-6\mathrm{e}^{-64\pi^2t}\sin 4\pi x$;

(4) $u(x,y)=y+xy+1$.

12. $u(\rho_0,\varphi_0)=\dfrac{A\rho_0}{a}\cos\varphi_0$，$(\rho_0,\varphi_0)$是圆域上任意一点.

习 题 十 三

2. $u(1,1)\approx1.0834$，$u(2,1)\approx0.7404$，$u(3,1)\approx0.4168$，

$u(1,2)\approx0.8862$，$u(2,2)\approx0.4616$，$u(3,2)\approx0.2196$.

3. 内节点处 $u_{ij}=\dfrac{5}{9}$.

5. $u_0^{(1)}=u_5^{(1)}=0$，$u_1^{(1)}=u_4^{(1)}=-0.04$，$u_2^{(1)}=u_3^{(1)}=0.04$

$u_0^{(2)}=u_5^{(2)}=0$，$u_1^{(2)}=u_4^{(2)}=0.26$，$u_2^{(2)}=u_3^{(2)}=-0.16$.

6. $u_1^{(1)}=u_4^{(1)}=0.6198$，$u_2^{(1)}=u_3^{(1)}=0.9991$，

$u_1^{(2)}=u_4^{(2)}=0.4113$，$u_2^{(2)}=u_3^{(2)}=0.6678$，

$u_1^{(3)}=u_4^{(3)}=0.0480$，$u_2^{(3)}=u_3^{(3)}=0.0800$

7. 有两个顶点处 $u_i=\dfrac{7}{23}$，另两个顶点处 $u_i=\dfrac{4}{23}$.

参考文献

〔1〕 夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌,《实变函数与泛函分析》,人民教育出版社,第二版,1985.

〔2〕 郑维行、王声望,《实变函数与泛函分析概要》,人民教育出版社,1980.

〔3〕 程其襄等,《实变函数与泛函分析基础》,高等教育出版社,1983.

〔4〕 熊洪允、邱忠文、陈荣胜,《勒贝格积分与泛函分析基础》,高等教育出版社,1992.

〔5〕 E. Kreyszig,《*Introductory Functional Analysis with Applications*》, John Wiley & Sons, 1978.

〔6〕 丁学仁、蔡高厅,《工程中的矩阵理论》,天津大学出版社,1988.

〔7〕 R. A. 合恩、C. R. 约翰逊著,杨奇译,《矩阵分析》,天津大学出版社,1989.

〔8〕 韩维信,《高等代数》,天津大学出版社,1993.

〔9〕 周伯壎,《高等代数》,人民教育出版社,1978.

〔10〕 黄琳,《系统与控制理论中的线性代数》,科学出版社,1984.

〔11〕 祝肇栋、吕沅熙等编,《高等数学》,天津大学出版社,1988.

〔12〕 徐利治、周蕴时、孙玉柏,《逼近论》,国防工业出版社,1986.

〔13〕 李岳生、黄友谦,《数值逼近》,人民教育出版社,1985.

〔14〕 杨凤翔、陆君良,《数值分析》,天津大学出版社,1985.

〔15〕 清华大学、北京大学《计算方法》编写组,《计算方法》,科学出版社,1974.

〔16〕 冯康等,《数值计算方法》,国防工业出版社,1978.

〔17〕 易大义、蒋叔豪、李有法,《数值方法》,浙江科学技术出版社,1984.

〔18〕 G. M. Phillips、P. J. Taylor,《*Theory and Applications of Numerical Analysis*》, Academic Press:London and New York, 1973.

〔19〕 W. Graga,《*Repeated Extrapllation to the limit in the Numerical Solution of ODE*》, Thesis UCLA, 1963.

〔20〕 C. W. 吉尔,《常微分方程初值问题的数值解法》,科学出版社,1978.

〔21〕 李荣华、冯果忱,《微分方程数值解法》,人民教育出版社,1980.

〔22〕 杨秀雯、梁立华,《数学物理方程与特殊函数》,天津大学出版社,1985.

〔23〕 复旦大学数学系编,《数学物理方程》,人民教育出版社,1979.

〔24〕 R.柯朗、D.希尔伯特著,钱敏、郭敦仁译,《数学物理方法》卷Ⅰ,科学出版社,1981.

〔25〕 R.柯朗、D.希尔伯特著,熊振翔、杨应辰译,《数学物理方法》卷Ⅱ,科学出版社1981.

〔26〕 Tyn Myint-U,《*Partial Differential Equations of Mathematical Physics*》, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1973.

〔27〕 南京大学数学系计算数学专业编,《偏微分方程数值解法》,科学出版社,1979.

〔28〕 姜礼尚、庞之垣,《有限元方法及其理论基础》,人民教育出版社,1980.

〔29〕 李开泰、黄文香、黄庆怀,《有限元方法及其应用》,西安交通大学出版社,1986.